

Г. В И Л Е Й Т Н Е Р

ХРЕСТОМАТИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

В Ы П У С К

II

ГЕОМЕТРИЯ
И
ТРИГОНОМЕТРИЯ

Г - Т - Т - И

КОНТРОЛЬНЫЙ ЛИСТОК
СРОКОВ ВОЗВРАТА

КНИГА ДОЛЖНА БЫТЬ
ВОЗВРАЩЕНА НЕ ПОЗЖЕ
УКАЗАННОГО ЗДЕСЬ СРОКА

Колич. пред. выдач

04

20.10.

СОУНБ им. В. Г. Белинского
<http://book.ugraic.ru/>

СОУНБ им. В. Г. Белинского
<http://book.ugraic.ru/>

СОУНБ им. В. Г. Белинского
<http://book.ugraic.ru/>



MATHEMATISCHE QUELLENBÜCHER

II

GEOMETRIE UND TRIGONOMETRIE

VON

DR. HEINRICH WIELEITNER

VERLAG OTTO SALLE, BERLIN, 1928

Г. ВИЛЕЙТНЕР

С. М. Сибирский

ХРЕСТОМАТИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

СОСТАВЛЕННАЯ
ПО ПЕРВОИСТОЧНИКАМ

ВЫПУСК ВТОРОЙ
ГЕОМЕТРИЯ И ТРИГОНОМЕТРИЯ

Перевод П. С. ЮШКЕВИЧА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1932 ЛЕНИНГРАД

Читатели! Сообщите отзыв об этой книге (ваши замечания о ее недостатках и желательных изменениях в следующем издании) по адресу: Москва, Мясницкая, 20, Государственному технико-теоретическому издательству (в секцию организационно-массовой работы).

СОУНБ им. В. Г. Белинского
<http://book.ugraic.ru/>

2254699

Редакционная работа по этой книге проведена А. П. Юшкевичем. Издание оформлено Н. И. Москвичевой. Корректуру держала Н. А. Демина. Наблюдал за выпуском Е. М. Богданов. Рукопись сдана в производство 13/III 1932 г. Листы подписаны к печати 10/X 1932 г. Книга вышла в свет в ноябре 1932 г. в количестве 5000 экз. на бумаге формата $82 \times 110^{1/4}$. Печатных знаков в листе 43000. Листов в книге $3^{3/4}$. Заказ № 875. ГТТИ № 254. Уполномоченный Главлита В-39559.

Предисловие

Уже в предисловии к первому тому, посвященному арифметике и алгебре, мы высказали общие соображения о цели и способе составления предлагаемых нами хрестоматий по истории математических наук. Надо, однако, заметить, что геометрия и тригонометрия находятся в совсем ином положении, чем алгебра. Геометрия (мы имеем в виду здесь элементарную планиметрию и стереометрию) стала законченной дисциплиной еще в древности, и „Начала“ Эвклида представляют собой учебное руководство, содержание которого пришлось — вплоть до новейшего времени — дополнить лишь в деталях и логическая структура которого, несколько уточненная в самое последнее время, принципиально не может быть улучшена. Поэтому избранные отрывки по вопросам геометрии или относятся сами к древности, или же должны показать, как при возрождении наук снова появилось на свет старое математическое достояние.

Иное приходится сказать о тригонометрии. Возникла она из потребностей астрономии и была поэтому первоначально сферической тригонометрией. Но прошло немало времени, прежде чем здесь были установлены настоящие теоремы. На языке формул тригонометрия была изложена лишь в XVIII в. Поэтому в ней, как и в алгебре, можно констатировать процесс известного развития. До XVIII в. вряд ли даже ясно сознавали, что тригонометрия является собственно особой ветвью геометрии. Она вела какое-то независимое существование и не упоминалась в книгах по геометрии. Поэтому она была включена в программу школьного преподавания лишь поздно, в XIX в. Даже в настоящее время существует какое-то средостение между ней и элементарной геометрией. В предлагаемом томе уделено внимание лишь элементарной тригонометрии. Только последний пример (теорему Муавра) можно рассматривать как переход к высшей тригонометрии, относящейся уже к анализу.

Перевод ряда отрывков, взятых у древних авторов, проверен моим коллегой Буллемером.

Г. Вилейтнер

Мюнхен, апрель 1927 г.

СОУНЬ им. В. Г. Белинского
<http://book.uraic.ru/>

Гиппократова луночка

Из „Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippocrates“. Griechisch und deutsch von Ferdinand Rudio. Urkunden zur Geschichte der Math. im Altertume, 1 Heft. Лейпциг, 1907.

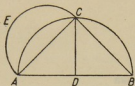
Предварительные замечания. Гиппократ Хиосский жил около 440 г. до н. э. и был одним из крупнейших математиков, предшественников Эвклида. Известно, что уже он написал „Начала“, которые, однако, утеряны. Его квадратуры круговых луночек представляют наиболее раннюю греческую работу по математике, сохранившуюся, если и не в оригинале, то в очень обстоятельном изложении ее.

Это изложение принадлежит Симплицию из Киликии (в южной части Малой Азии). Симплиций (начало VI в. н. э.) принадлежал к числу последних учеников афинской школы платоников, эмигрировавших после закрытия императором Юстинианом этой школы за ее „языческий“ дух в Персию. Приводимое нами сообщение было составлено в связи с одним местом из „Физики“ Аристотеля, к которой Симплиций написал обширный, сохранившийся до наших дней, комментарий. В интересующей нас части своего комментария Симплиций опирается на толкователя Аристотеля, — Александра из Афродизии (в Карию, в юго-западной части Малой Азии), жившего в Афинах около 200 г. н. э., и на непосредственного ученика Аристотеля, Эвдема Родосского, написавшего по предложению своего учителя „Историю геометрии“ (не забудем, что это происходило за одно поколение до Эвклида). Только благодаря сообщению Симплиция сохранились отрывки из обоих этих важных сочинений. Нижеследующее заимствовано Симплицием из комментария Александра к Аристотелю. Перевод взят у Рудео (Rudio).

Стр. 30/31... Доказательство же таково:

Пусть будет, говорит он (именно — Александр), *АСВ* (фиг. 1) полукруг, описанный над прямой *АВ*.

И пусть D будет серединой AB . Проведем в D прямую DC перпендикулярно к AB , а из C прямую CA , представляющую одну сторону квадрата, вписанного в окружность, полуокружностью которого является ACB . Опишем полуокружность AEC над прямой AC . Так как квадрат на AB равен квадрату на AC , сложенному с квадратом на другой стороне вписанного в ACB квадрата, т. е. на CB ¹⁾ (ибо AB есть гипотенуза прямоугольного треугольника; а окружности и полуокружности, описанные во-



Фиг. 1.

круг диаметров, относятся между собой, как построенные на них квадраты, как это доказано в 12 книге „Начал“²⁾, то, следовательно, полуокружность ACB вдвое больше полуокружности AEC . Но полуокружность ACB также вдвое больше квадранта ACD . Следовательно этот квадрант равен полуокружности AEC . Отнимем у квадранта и у этой полуокружности сегмент, образуемый стороной квадрата и дугой AC . В таком случае остающаяся луночка AEC равна треугольнику ACD , который равен некоторому квадрату...

Пояснительные замечания. Читатель сумеет сам придать этому доказательству более краткий современный вид.

Рассмотренная выше теорема имеется в любом учебнике как интересный для упражнения пример. Но для древних она имела более серьезное значение. На основании ее умозаключали, что и сам круг доступен квадратуре, т. е. может быть превращен в прямолинейную фигуру, раз это возможно в случае сравнительно более сложных фигур, как гиппократовы луночки. Гиппократ нашел квадратуру не только вышеуказанной луночки, но, как сообщает Эвдем, построил элементарным путем и нашел квадратуры еще двух других луночек. Неверно, однако, будто Гиппократ полагал, что с помощью своих квадратур он нашел также квадратуру самого круга, как это думали Александр и также Аристотель³⁾. Но, несомненно, что это являлось целью его исследований, одним из побочных результатов которого и была квадратура луночек. Только арабы первые нашли сумму

¹⁾ Скобки в оригинале.

²⁾ Эвклид, XII, 2.

³⁾ Рудио решительно придерживается этого взгляда. Но И. Л. Гейберг (Heiberg) считает вполне допустимым и противоположное воззрение (Gesch. d. Math. u. Naturw. im Altertum, München, 1925, S. 6—7).

луночек, построенных на катетах любого прямоугольного треугольника [Ибн Альхайтам (Ibn Alhaitham) около 1000 г.]. Во всяком случае у Гиппократе теорема эта не встречается.

II

Геометрическое доказательство одного алгебраического тождества

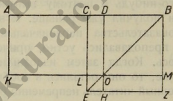
Из „Euclidis Elementa“, ed. I. L. Heiberg, кн. II, теорема 5, т. I. Lipsiae, 1883.

Стр. 128. Если какая-нибудь прямая линия (отрезок) разделена на равные части и на неравные, то составленный из неравных частей всего (отрезка) прямоугольник вместе с квадратом на отрезке между обеими точками деления, равен квадрату на половине (данного отрезка).

Пусть, действительно, прямая (отрезок) AB будет разделена на равные части в C , на неравные в D (фиг. 2); в таком случае прямоугольник на AD , DB вместе с квадратом на CD , равен квадрату на CB .

Построим на CB квадрат $CEZB$ и проведем прямую BE ; проведем через (точку) D параллельно к каждой из (прямых) CE , BZ прямую DH , а через (точку) O параллельно к каждой из (прямых) AB , EZ прямую KM и далее через (точку) A параллельно к каждой из (прямых) CL , BM прямую AK . И так как дополнительный параллелограмм CO равен дополнительному параллелограмму OZ , то прибавим¹⁾ общий (параллелограмм) DM ; тогда все CM равно всему DZ . Но CM равно AL , так как AC равно CB . В таком случае и AL равно DZ .

Прибавим общее CO . Тогда все AO равно гномону $LCBZHO$ ²⁾. Но AO есть (прямоугольник) на AD , DB , ибо DO равно DB . В таком случае гномон $LCBZHO$ тоже равен (прямоугольнику) на AD , DB . Прибавим теперь общее LH , равное (квадрату) на CD . Тогда гномон $LCBZHO$ и LH (вместе)



Фиг. 2.

¹⁾ Мы теперь говорим: к обеим сторонам, ибо мы при этом непременно думаем о равенстве.

²⁾ „Гномон“, — первоначально стержень, тенью которого пользовались для измерения времени, был введен уже пифагорейцами в качестве одного из основных элементов геометрии. У Эвклида он обозначается тремя буквами, соответствующими трем площадкам, из которых он состоит. Но нам казалось, что употребление такого обозначения представляло бы неудобство для понимания текста.

равны прямоугольнику, на AD , DB и (квадрату) на CD . Но гномон $LCBZHO$ и LH (вместе) представляют квадрат $CEZB$ (построенный) на CB . Значит прямоугольник на AD , DB вместе с квадратом на CD , равен квадрату на CB .

Таким образом, если какая-нибудь прямая разделена на равные и неравные части, то образованный из неравных частей всего (отрезка) прямоугольник, вместе с квадратом на отрезке между обеими точками деления, равен квадрату на половине (данного отрезка), что и требовалось доказать.

Пояснительные замечания. Мы сознательно по ряду соображений остановились в своем выборе на этой теореме. Во-первых, она представляет прекрасный образчик метода доказательства Эвклида, который кажется нам несколько растянутым. Однако следует принять во внимание, что Эвклид, не обладая алгебраической символикой, лишен возможности сформулировать что-нибудь и поэтому вынужден каждый раз повторять то, что он получил уже раньше. К этому следует добавить, что все эти доказательства первоначально предназначались не для чтения, а преподавались устно, причем, разумеется, ничто не записывалось. Когда затем изложили эти доказательства в письменном виде, то они остались в сообщенной им традицией форме. Современный читатель непременно будет мыслить себе ход доказательства в виде равенств или даже выпишет их, чтобы легче понять его. Мы не можем не восхищаться греками, которые сумели, несмотря на отсутствие у них буквенной алгебры, добиться столь значительных результатов.

То, что мы теперь формулируем с помощью букв, то было для греков геометрической теоремой. Это видно и на нашем примере.

Положим $AD = m$, $DB = n$, следовательно,

$$AC = \frac{m+n}{2}, \quad CD = \frac{m+n}{2} - n = \frac{m-n}{2}.$$

В таком случае доказываемая Эвклидом теорема гласит:

$$mn + \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2. \quad (1)$$

Для „доказательства“ этой формулы мы производим просто соответствующие выкладки. Для нас это алгебраическое „тождество“.

В следующем номере мы увидим, как Эвкл д использует в своих доказательствах эту теорему. Но для греков она имела, сверх того, еще более серьезное значение. Это не сказано прямо у Эвклида; но это можно вывести с величайшей степенью вероятности из ряда других теорем и построений у самого Эвклида и у других греческих математиков. Действительно, положим $AB = a$, $DB = x$, тогда легко видеть, что теорема приобретает следующий вид:

$$x(a - x) + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2. \quad (2)$$

Если теперь нам нужно решить квадратное уравнение

$$x(a - x) = b^2, \quad (3)$$

причем, разумеется, речь идет только о геометрическом решении его, то, согласно формуле (2), имеем:

$$b^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad (4)$$

или

$$\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2, \quad (5)$$

формулу, которую в настоящее время мы получаем путем алгебраического преобразования формулы (2). Но правую сторону равенства (5) грек мог с помощью пифагоровой теоремы превратить в квадрат c^2 , так что он получал:

$$\frac{a}{2} - x = c; \quad (6)$$

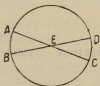
$$x = \frac{a}{2} - c. \quad (7)$$

Так как греки не знали ни отрицательных, ни, тем более, мнимых чисел (ведь числа у них должны были выражаться в виде отрезков), то ясно, что a , b^2 , c^2 и c должны быть всегда снабжены положительными знаками. В квадратном уравнении даже в случае двух положительных корней, всегда рассматривали только один из них (ср. т. I, № XV).

Теорема о пересекающихся внутри окружности хордах

Из „Euclidis Elementa“, ed. I. L. Heiberg. Lib. III, 35, vol. I, Lipsiae, 1883, стр. 256.

Если две прямые пересекаются внутри окружности, то прямоугольник, построенный на двух отрезках одной из них, равен прямоугольнику, построенному на отрезках другой.

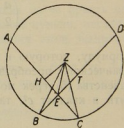


Фиг. 3.

Пусть внутри окружности $ABCD$ (фиг. 3) в точке E пересекаются две прямые AC, BD ; я утверждаю в таком случае, что прямоугольник, построенный на AE, EC , равен прямоугольнику, построенному на DE, EB .

Прежде всего, если AC, BD проходят через центр, так что E является центром окружности $ABCD$, то так как AE, EC, DE, EB равны между собой, ясно, что и прямоугольник, построенный на AE, EC , равен прямоугольнику, построенному на DE, EB .

Если же AC, DB не проходят через центр окружности $ABCD$, то пусть этим центром будет Z (фиг. 4); опустим из Z перпендикуляры на прямые AC, DB , именно ZH, ZT , и проведем также ZB, ZC, ZE .



Фиг. 4.

И так как прямая, проходящая через центр, как HZ , в том случае, когда она пересекает под прямым углом другую прямую, не проходящую через центр, как AC , делит ее пополам, то AH равно HC . Но так как прямая AC разделена в точке H на две равных части, а в точке E на две неравных, то прямоугольник, на AE, EC , вместе с квадратом на EH , равен (квадрату) на HC . Прибавим (к обеим сторонам) (квадрат) на HZ . В таком случае прямоугольник, на AE, EC вместе с (квадратами) на HE, HZ , равен (квадратам), на CH, HZ (взятым вместе). Но (квадратам) на EH, HZ (взятым вместе) равен (квадрат) на ZE , а (квадратам) на CH, HZ (взятым вместе) равен (квадрат) на ZC . В таком случае (прямоугольник), построенный на AE, EC , вместе с (квадратом) на ZE , равен (квадрату) на ZC . Но ZC равно ZB . В таком случае (прямоугольник) на AE, EC вместе с (квадратом) на EZ ,

равен (квадрату) на ZB . По тем же соображениям (прямоугольник) на DE, EB вместе с (квадратом) на ZE , равен (квадрату) на ZB . Но было доказано, что и (прямоугольник) на AE, EC вместе с (квадратом) на ZE , равен (квадрату) на ZB . В таком случае (прямоугольник) на AE, EC вместе с (квадратом) на ZE , равен (прямоугольнику) на DE, EB вместе с (квадратом) на ZE . Отнимем общий (квадрат) на ZE . Тогда остается, что прямоугольник, на AE, EC , равен прямоугольнику, построенному на DE, EB .

Следовательно, если две прямые пересекаются внутри окружности, то прямоугольник на отрезках одной из них, равен прямоугольнику, на отрезках другой, что и требовалось доказать.

Пояснительные замечания. Эту теорему о пересекающихся внутри окружности хордах мы доказываем в настоящее время на основании подобия. Но она не зависит от подобия, а основывается просто на пифагоровой теореме. В этом отношении доказательство Эвклида представляет интерес. Кроме того, Эвклид не мог пользоваться свойствами подобия, ибо они появляются у него лишь в 6-й книге, после изложения в 5-й книге учения о пропорциях.

Мы переложим теперь растянутое словесное доказательство Эвклида на язык нашей краткой алгебраической символики. В этом случае оно сводится к следующему:

$$AE \cdot EC + HE^2 = HC^2 \text{ (по теореме предыдущего номера).}$$

Отсюда:

$$AE \cdot EC + HE^2 + HZ^2 = HC^2 + HZ^2,$$

или

$$AE \cdot EC + ZE^2 = ZC^2 \text{ (по пифагоровой теореме).}$$

Аналогичным образом:

$$DE \cdot EB + ZE^2 = ZB^2 (= ZC^2),$$

следовательно,

$$AE \cdot EC = DE \cdot EB.$$

Чтобы придать этому доказательству совершенно современный вид, мы бы формулировали его следующим образом. Пусть $AE = m$, $CE = n$, $BZ = r$, $ZE = p$; заметим, что при вращении хорды AC вокруг точки E p и r остаются неизменными, а m и n изменяются.

Тогда:

$$HZ^2 = r^2 - \left(\frac{m+n}{2}\right)^2,$$

$$HZ^2 = p^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2,$$

следовательно

$$r^2 - \frac{mn}{2} = p^2 + \frac{mn}{2},$$

или

$$mn = r^2 - p^2,$$

т. е. произведение mn постоянно при всяком положении AC .

IV

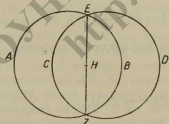
Пересечение двух больших кругов

Из „Theodosii Tripolitae Sphaericorum libros tres Ernestus Nizze recognovit...“, Berolini, MDCCCLII (по-греч. и лат.). Книга I, предложение 11, теорема 1).

Стр. 11 (лат. стр. 81).

На шаре большие круги делят друг друга пополам.

Пусть даны на шаре два больших круга, как AB , CD , пересекающиеся в точках E , Z (фиг. 5); я утверждаю, что круги AB , CD делят друг друга пополам. Возьмем, действительно, центр их, которым пусть будет (точка) H ; он тот же, что и центр шара; и проведем (прямые) EH , HZ .



Фиг. 5.

Так как точки E , H , Z лежат в плоскости AB и в то же время принадлежат (плоскости) DC , то точки E , H , Z лежат в обеих плоскостях кругов AB , CD и, следова-

тельно, E , H , Z принадлежат общему пересечению этих плоско-

1) В отличие от теорем остальные „предложения“ названы „проблемами“, т. е. задачами.

стей. Но общее пересечение двух плоскостей это всегда прямая. Следовательно E, H, Z есть прямая. И так как точка H есть центр круга AB , то EZ есть диаметр его, а каждая из обеих (дуг) EAZ, EBZ есть полуокружность. Так как, далее, точка H есть центр круга CD , то EZ есть диаметр его и, следовательно, каждая из обеих (дуг) ECZ, EDZ есть полуокружность. Следовательно круги AB, CD делят друг друга пополам.

Пояснительные замечания. Мы выбрали эту простую теорему из „Сферики“ (учение о шаре) для того, чтобы показать, как рано возникла потребность в установлении и доказательстве таких теорем, которые не встречаются в „Началах“ Эвклида. Сферика была связана, как и (первоначально только сферическая) тригонометрия, сперва с астрономией и не относилась, таким образом, к настоящей геометрии. Поэтому первые изложения геометрии на сфере ясно свидетельствуют о ее астрономическом происхождении. Но у Теодосия из Триполиса, жившего во II в. до н. э., дело носит уже иной характер. Его сочинение, однако, опирается на какую-то другую, до-эвклидову, работу, автором которой был, может быть, великий астроном и математик Эвдокс (IV в. до н. э.), сочинения которого, к сожалению, все погибли.

Рисунок (схематический) я заимствовал из цитированного издания. Он соответствует, таким образом, рукописям. Самой теоремой (или, скорее, обратной ей теоремой) пользуется также Эвклид в своих „Phainomena“ — сферике вышеуказанного более старого типа¹⁾.

В 1826 г. Ницце (Nizze) издал в Штральзунде немецкий перевод сферики Теодосия.

V

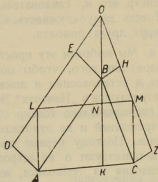
Теорема Паппа

Из „Pappi Alexandrini Collectionis, quae supersunt e libris manuscriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch“. Volumen I. Berolini apud Weidmannos“, MDCCCLXXVI.

Стр. 176 (Lib. IV, 1). Пусть будет (дан) треугольник ABC (фиг. 6); опишем на (сторонах) AB, BC любые параллелограммы $ABDE, BCZH$ и продолжим (прямые) DE, ZH до (точки) O и проведем (прямую) OB ; тогда параллелограммы $ABDE, BCZH$ (взятые вместе) равны параллелограмму (который можно образовать) из AC, OB , расположив их под углом, равным сумме обоих (углов) BAC, DOB .

¹⁾ Ed. H. Menge, Lpz., B. G. Teubner, 1916, стр. 8, 9.

Действительно, продолжим OB до K и проведем через A, C параллельно к OK (прямые) AL, CM и проведем LM . Так как $ALOB$ параллелограм, то AL, OB равны и параллельны. Соответственным образом равны также и параллельны MC, OB ,



Фиг. 6.

так что и LA, MC равны и параллельны. Следовательно, и LM, AC равны и параллельны. Значит, $ALMC$ есть параллелограм с углом LAC , равным сумме углов BAC и DOB . Действительно, угол DOB равен углу LAB . И так как параллелограм $DABE$ равен (параллелограмму) $LABO$ — действительно, у них одно и то же основание AB и они (лежат) между теми же самыми параллельными (линиями) AB, DO , — а $LABO$ равен $LAKN$ — действительно, у них одно и то же основание LA и они (лежат)

между теми же самыми параллельными (линиями) LA, OK — следовательно, и $ADEB$ равен $LAKN$. По тем же основаниям и $BHNC$ равен $NKCM$. Следовательно, параллелограммы $DABE, BHNC$ (взятые вместе) равны $LACM$, т. е. (параллелограмму) на AC, OB , образующих угол, равный углу LAC , равному сумме углов BAC, BOL . И это является гораздо более общим, чем то, что доказано было в „Началах“ о прямоугольных треугольниках относительно квадратов.

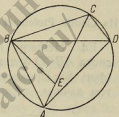
Пояснительные замечания. „Собрание“ жившего в позднюю греческую эпоху (конец III в. н. э.) Паппа представляет обширный труд, большая часть которого сохранилась (но, например, вся первая книга пропала). Хотя Папп является также вполне серьезным математиком, но в его труде содержится меньше самостоятельных открытий (к которым относится и вышеприведенная теорема), чем комментированных извлечений из авторов, произведения которых не дошли до нас.

По поводу вышеприведенной теоремы, которая и в настоящее время доказывается таким же образом, остается только указать, что в заключительных словах ее имеется в виду, разумеется, пифагорова теорема. Теорема Паппа остается в силе и в том случае, если один из параллелограммов построить внутри. Но греки не имели обыкновения анализировать все частные случаи устанавливаемых ими теорем.

Теорема Птоломея

Из „Claudii Ptolemaei Opera quae exstant omnia“. Vol. I: Syntaxis mathematica. Ed. I. L. Heiberg, pars I, Кн. I, 10, Лейпциг, 1898 (только по-гречески). — „Des Claud'us Ptolemaeus Handbuch der Astronomie“, I Band. Aus dem Griechischen übersetzt und mit erklärenden Anmerkungen versehen von Karl Manitius, Лейпциг, 1912.

Ed. Heiberg, стр. 36; ed. Manitius, стр. 28. Пусть дана окружность, в которую вписан произвольный четырехугольник $ABCD$ (фиг. 7). Проведем AC и BD ; требуется доказать, что прямоугольник, образуемый AC и BD , равен обоим (взятым вместе) прямоугольникам на AB , DC и AD , BC . Действительно, построим угол ABE , равный (углу) DBC . Если мы прибавим общий (угол) EBD , то и угол ABD будет равен (углу) EBC . Но и (угол) BDA равен (углу) BCE , ибо они опираются на одну и ту же дугу. Значит углы треугольника ABD равны углам треугольника BCE .



Фиг. 7.

Следовательно BD относится к DA , как BC к CE ; значит (прямоугольник) на BC , AD равен (прямоугольнику) на BD , CE . Далее, так как угол ABE равен углу DBC , а также (угол) BAE равен (углу) BDC , то треугольник ABE имеет углы, равные (углам) треугольника BCD ; и, следовательно, BD относится к DC , как BA к AE . Значит (прямоугольник) на BA , DC равен (прямоугольнику) на BD , AE . Но было доказано, что и (прямоугольник) на BC , AD равен (прямоугольнику) на BD , CE . Поэтому и весь (прямоугольник) на AC , BD равен обоим (вместе взятым) (прямоугольникам) (прямоугольнику) на AB , DC и (прямоугольнику) на AD , BC , что и требовалось доказать.

Пояснительные замечания. Так как приведенное здесь доказательство совпадает с тем, которое дается во всех наших учебниках, то весь интерес отрывка заключается в греческом способе изложения его, который я поэтому пытался (в противоположность Маницию) сохранить по возможности точно. Читатель заметит, насколько больше требуется умственного напряжения при таком, лишенном помощи символики, способе изложения, чем при нашей форме изложения (которой вполне правильно воспользовался Маниций, преследовавший совсем иные цели, чем

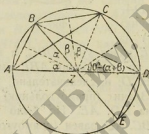
я в данной хрестоматии). Для Птолемея эта теорема только вспомогательное предложение, которым он пользуется для вывода, например, из хорд двух углов хорды разности их. Выражаясь точнее, он определяет, зная хорды углов α и β , хорды $\alpha - \beta$, $\alpha + \beta$, а также хорду $\frac{1}{2}\alpha$. Полученный им результат соответствует нашим формулам (отсутствующим, разумеется, у него) для $\sin(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$ и $\sin^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)$. Ср. следующий номер.

VII

Теорема сложения косинусов

Из Claudii Ptolemaei „Syntaxis“, (см. предыдущий номер), книга 1, 10.

Ed. Heiberg, I, 1 стр. 41; ed. Manitius, стр. 31. Пусть снова $ABCD$ будет окружностью с диаметром AD и центром Z (фиг. 8). Проведем, начиная с A , две следующих друг за другом данных дуги AB , BC и проведем данные то же одновременно прямые AB , BC . Я утверждаю,



Фиг. 8.

что если мы проведем AC , то и она будет дана. Действительно, проведем через B диаметр BZE окружности и проведем BD , DC , CE , DE . Ясно само собой, что благодаря BC дается также CE , и с другой стороны, что с помощью AB можно определить также BD и DE . А так как $BCDE$ представляет четырехугольник в окружности, а BD , CE — диагонали, то, согласно вышеприведенной теореме,

построенный на диагоналях прямоугольник равен обоим (взятым вместе) (прямоугольникам), построенным на противоположных сторонах. Следовательно, так как (прямоугольник) на BD , CE дан, а также дан (прямоугольник) на BC , DE , то определяется тем самым и (прямоугольник) на BE , CD . Но также дан диаметр BE , поэтому дана и остающаяся сторона CD , а отсюда можно определить также дополнительную хорду в полуокружности, именно CA . Следовательно, если даны две дуги окружности и (стягивающие) их прямые, то, согласно этой теореме, дана и прямая, стягивающая обе эти дуги вместе взятые.

Пояснительные замечания. Как уже было указано (см. предыдущий номер), Птоломей не в состоянии, разумеется, дать общие формулы, так как он не обладает необходимой для этого алгебраической символикой. Он может только сказать, как определяется на основании известных теорем (в данном случае это только пифагорова и птолемея теоремы) по данным хордам искомая хорда. Итак, пусть даны AB и BC ; опираясь на пифагорову теорему, можно считать вычисленными BD и CE ; далее, $DE = AB$ (чего Птоломей, странным образом, не говорит прямо), тогда мы имеем:

$$\begin{aligned} BD \cdot CE &= BC \cdot DC + BE \cdot CD, \\ BE \cdot CD &= BD \cdot CE - BC \cdot DE, \end{aligned}$$

значит:

$$CD = \frac{BD \cdot CE - BC \cdot DE}{BE}.$$

Это и имеет в виду Птоломей. Искомая же хорда AC определяется затем в свою очередь при помощи пифагоровой теоремы. Назовем теперь, пользуясь современным способом обозначения, центральный угол, опирающийся на хорду AB , через 2α , а угол, опирающийся на хорду BC , через 2β и положим $AD = BE = 2r$; в таком случае $AB = 2r \sin \alpha$, $BC = 2r \sin \beta$; искомая хорда AC должна равняться $2r \sin(\alpha + \beta)$. Но CD в этом случае равно $2r \cos(\alpha + \beta)$, точно так же $BD = 2r \cos \alpha$; $CE = 2r \cos \beta$. Вышеприведенная формула дает тогда:

$$2r \cos(\alpha + \beta) = \frac{2r \cos \alpha \cdot 2r \cos \beta - 2r \sin \alpha \cdot 2r \sin \beta}{2r}.$$

и, следовательно,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Читатель сам сумеет вывести отсюда формулу для $\sin(\alpha + \beta)$ на основании выражения $\sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)}$. Для Птолемея было достаточно составить на основании численных значений хорд свою таблицу хорд (соответствующую нашей таблице синусов).

VIII

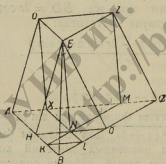
Первое вычисление объема усеченной пирамиды

Из Herons von Alexandria, „Vermessungslehre und Dioptra“, Griechisch und deutsch von Hermann Schöne, Лейпциг, 1903.

Предварительные замечания. Стереометрия возникла очевидно, из рассмотрения правильных тел, представлявших, кроме

математического, и большой философский интерес, как это видно из учения Платона, воспользовавшегося ими в своей космологии. Их теория вместе с простейшими теоремами о прямой и плоскостях, а также о конусе и цилиндре, содержится в XI—XIII книгах эвклидовых „Начал“. Теоремы, касающиеся шара, были найдены лишь позже Архимедом. С тех пор картина, представляемая элементарной стереометрией, почти не изменилась. Объем усеченной (квадратной) пирамиды вычисляли при случае, находя его, однако, скорее ошупью, уж ранние египтяне; но, как мы сейчас увидим, даже Герон, живший, вероятно, в III в. н. э., не имеет еще соответствующей формулы и решает задачу путем разложения пирамиды на отдельные части. Только у Леонардо Пизанского (1220 г.) мы встречаем впервые правило, в точности соответствующее употребляемой нами теперь формуле. Нижеследующий перевод в точности воспроизводит форму изложения греческого текста. Но я позволил себе исправить чертеж по сравнению с тем, который имеется в рукописях.

Стр. 104. Требуется измерить усеченную пирамиду, имеющую треугольное основание. Ее верхняя площадь тоже треугольна и подобна основанию. Пусть, основанием пирамиды будет треугольник ABC (фиг. 9), верхней же площадкой треугольник DEZ , подобный ABC . Далее, пусть AB равняется



Фиг. 9.

18 единицам, BC — 24, AC — 36, DE — 12; в таком случае EZ (будет равно) 16, а DZ — 24. Пусть, далее, опущенная из треугольника, DEZ на основание (высота) равняется 10 единицам. Возьмем теперь AH , равное DE , CO , равное EZ , проведем HO , разделим пополам BO и BH в точках K, L , проведем через точку K (прямую) KM , параллельную BC , проведем LN и продолжим ее до X и проведем еще KL . Так как треугольники ABC и DEZ подобны, то BC относится к EZ , т. е. к CO , как AB к DE , т. е. к AH . Следовательно, AC параллельна HO . И так как HK, KB равны, а KNM, BO параллельны, то NH равна NO . Но и BL (равна) LO . Следовательно, LNK параллельна AB , но также и KL параллельна HO , т. е. AC . Следовательно, $AKLX$ и $KLCM$ суть параллелограммы и они равны, ибо у них одно и то же основание и они распо-

ложены между двумя параллельными. По тем же соображениям и $HKLN$ равно $NKLO$; (в таком случае) остаточный параллелограм $AHNX$ равен параллелограмму $NOCM$. И так как $АН$, или же NX , равна DE , а CO , или же MN , равна EZ и они образуют равные углы, то, следовательно, и $ХМ$ равна DZ . И так как KL равна каждой из обеих AX , MC , то, следовательно, и AX равна MC . Следовательно, CX есть половина суммы AC , MX , т. е. AC , DZ . С другой стороны, так как KB равна KH , то AK , или XL , равна половине суммы BA , HA , т. е. AB , DE . По тем же основаниям LC равна половине BC , EZ . Но так как объем усеченной пирамиды складывается из призмы, основанием которой служит параллелограм $AHNX$, а вершиной прямая DE , и из призмы, основанием которой служит параллелограм $MNOC$, а вершиной прямая EZ , и еще из другой призмы, основанием которой служит треугольник MNX , а вершиной (треугольник) DEZ , и, далее, из пирамиды, основанием которой служит треугольник BHO , а вершиной точка E ; так как, далее, объем призм, основаниями которых служат параллелограммы $AHNX$ и $NOCM$ и высота которых та же, что высота пирамиды, равен площади параллелограмма $NMOC$, умноженной на высоту, объем же призмы, основанием которой служит треугольник MNX , а вершиной (треугольник) DEZ , равен MNX , помноженной на высоту, далее, объем, пирамиды, основанием которой служит треугольник BHO , вершиной же точка E , равен трети площади треугольника BHO , умноженной на высоту, а треть треугольника BHO равна одной с третью LNO вследствие равенства¹⁾...), треть же треугольника LNO равна одной двенадцатой треугольника BHO , то объем усеченной пирамиды равен площади треугольника XLC , сложенной с двенадцатой частью треугольника BHO и умноженной на высоту. Но высота дана. Надо, следовательно, доказать, что и треугольник XLC дан и также двенадцатая (часть) BHO . Так как сумма AB и DE дана и было доказано, что XL есть половина ее, то, следовательно, и XL дана. Но по тем же основаниям даны каждая из обеих LC , CX , так что и треугольник XLC дан. С другой же стороны, так как даны каждая из BA , $АН$, то, следовательно, дана и BH и по тем же основаниям и BO . Далее, так как даны каждая из AC , MX , то дана также их разность, именно сумма AX и MC , т. е. HO . Следовательно, дан также и треугольник $HOВ$, и, значит, и двенадцатая (часть) его. Теперь

¹⁾ В сохранившемся тексте здесь имеется пропуск.

вычисление производится следующим образом. Сложи 18 и 12, половина суммы их будет 15, затем 24 и 16, половина которых будет 20, далее — 36 и 24, половина которых будет 30. И надо вычислить треугольник, стороны которого 15, 20, 30. Он, как мы показали, будет приблизительно равен $131\frac{1}{4}$. Отними

теперь 12 от 18, остается 6, и — 16 от 24, остается 8, и — 24 от 36, остается 12. Измерим треугольник, стороны которого 6, 8, 12. Он, как мы показали, будет равен приблизительно 21.

Двенадцатая часть этого будет $1\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. Прибавь к ним $131\frac{1}{4}$, получится 133. Умножь это на высоту, и тогда получится объем усеченной пирамиды *ABCDEZ*.

Пояснительные замечания. На чертеже *EN* вертикально, чего не указано в тексте. Поэтому рассматриваемые призмы „перпендикулярные“ призмы. Не останавливаясь на достаточно ясном, само по себе, разложении пирамиды, заметим только, что обе призмы над параллелограммами *AHNX* и *MNOC* и с „вершинами“ *DE* и *EZ* равнообъемны и, взятые вместе, равны параллелепипеду с основанием *MNOC* и данной высотой. К этому присоединяется призма с треугольным основанием *XNM*. Таким образом мы имеем призму с трапецией *XNOC* в качестве основания и с данной высотой. К этому присоединяется призма, имеющая основанием $\frac{4}{3}$ треугольника *NLO* и ту же самую высоту.

Если отнять отсюда треугольник *NLO* и причислить его к предыдущему, то мы получим, в общем, призму с основанием *XLC* и с данной высотой и к этому еще призму с основанием $\frac{1}{3}NLO = \frac{1}{12}HBO$ и с данной высотой. Но стороны треугольника

XLC представляют каждая арифметические средние соответствующих сторон, основания и верхней площадки, а стороны треугольника *HBO* равны каждая разности соответствующих сторон основания и верхней площадки. Отсюда и получается все остальное — Герон пользуется дважды названной по его имени, но, наверно, не им открытой, формулой (см. ниже, № XII). Заметим еще, что у греков буквы алфавита в известном порядке служили цифрами. Поэтому в своем переводе мы писали цифры там, где они имеются

в оригинале. В конце отрывка имеется дробь $1\frac{1}{2}\frac{1}{4}$, напи-

санная на египетский манер (см. т. I, № III). Она означает

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 \frac{3}{4}.$$

IX

Длина окружности и площадь круга у немецких землемеров около 1400

Из так называемой „*Geometria Culmensis*.“ Издана с подзаголовком „Ein agronomischer Traktat aus der Zeit des Hochmeisters Conrad von Jungingen (1393—1407)“ Г. Мендталем (Mendthal), Лейпциг, 1886 (там — стр. 67). Текст дан по-латыни и по-немецки.

О длине окружности

Если известен диаметр, то как найти длину окружности?

Учителя говорят, что длина окружности в $3 \frac{1}{7}$ раза

больше диаметра, так что если диаметр 7, то окружность равна 22. Следовательно, если знают длину диаметра, то длину окружности находят следующим образом: умножь длину диаметра на 22 и раздели результат на 7, частное представляет тогда длину окружности. Действительно, оба числа 22 и 7, представляют наименьшие целые числа, дающие отношение

$$3 \frac{1}{7}.$$

Стр. 69...

Найти площадь кругообразного поля.

Умножь половину длины окружности на половину диаметра, и все готово.

Пояснительные замечания. Область Кульм в прежней западной Пруссии, принадлежащая теперь Польше, представляет место поселения Немецкого ордена, вышеназванный гроссмейстер которого поручил составить для землемеров цитируемую нами работу, и сившую, разумеется, чисто практический характер. Имя автора ее не сохранилось. Употребляемое в ней отношение 22:7 было дано Архимедом (III в. до н. э.) Оно было известно в продолжение всех средних веков. Даже крупные ученые считали его тогда вполне точным. Тем интереснее отметить, что восточно-немецкий геометр вполне отчетливо сознает лишь приближенный характер его. Это ясно видно из приведенного нами

отрывка, но в латинском тексте это вскоре еще особо оговаривается. — *Geometria Culmensis* наиболее старинное геометрическое сочинение на немецком языке.

X

Первая формулировка теоремы косинусов для сферического треугольника

Из „*Doctissimi viri et mathematicarum discipuli* linearum eximij professoris IOANNIS DE REGIO MONTE de Triangulis omnimodis libri quinque“... Norimbergae... Anno Christi M. D. XXXIII.

Предварительные замечания. Региомонтан умер в 1476 г. в разгар ряда задуманных им работ, оставив в ненапечатанном виде свои „Пять книг о различного рода треугольниках“, которые были закончены уже около 1464 г., хотя им нехватало еще последней отделки. В 1533 г. рукопись попала в руки Иоганна Шенера (Schöner), напечатавшего ее. Только тогда она смогла начать оказывать огромное влияние на развитие тригонометрии, хотя ею пользовались еще и ранее.

Стр. 127 (Liber V, II). Во всяком сферическом треугольнике, состоящем из дуг больших кругов, отношение *sinus versus*¹⁾ какого-нибудь угла к разности двух *sinus versus*, из которых один (берется) от стороны, стягиваемой этим углом, а другой — от разности обеих дуг, заключающих сам этот угол, равно отношению квадрата целого *sinus rectus* к прямоугольнику, образованному синусами дуг, заключающих рассматриваемый угол.

Доказательства этой теоремы, вследствие пространности его, мы здесь не приведем. Мы приведем еще лишь первое наставление к приложению этой теоремы, не очень, правда, содержательное. Многозначия, имеющиеся в нижеследующем отрывке, представляют места, где Региомонтан цитирует самого себя. Но пробелы имеются и в оригинале, ибо Шенер, очевидно, не настолько глубоко понял суть дела, чтобы он легко мог заполнить их сам.

Стр. 129 (Liber V, III).

Даны три стороны сферического треугольника, составленного из дуг больших кругов; измерить все его углы.

1) Региомонтан пишет всегда раздельно это слово и склоняет его так же как и слово *sinus rectus*.

Хотя задачу эту можно решить посредством..., но нам захотелось приложить к ней вышеизложенную теорему, ибо вид истины становится тем приятнее, чем более многочисленными и различными путями приходишь к одной и той же цели. Итак, пусть рассматриваемым треугольником будет abc , составленный из дуг больших кругов, и пусть требуется найти его угол bac или какой-нибудь другой. Предположим, что все три стороны не равны, ибо если бы две каких-нибудь из них были равны, то следовало бы поступить по правилам.... Так как по предыдущему отношение квадрата целого $\sinus\ rectus$ к (прямоугольнику), образуемому $\sinus\ rectus$ обеих дуг ab и ac равно отношению $\sinus\ versus$ искомого угла bac к разности двух $\sinus\ versus$, одного от bc , а другого от разности обеих дуг ab и ac , и так как по предположению три из этих величин известны, то известна и четвертая, именно, $\sinus\ versus$ угла bac ; отсюда определяется его дуга, дающая величину угла bac , и, таким образом, можно считать измеренным и сам угол bac . Для нахождения остальных двух углов мы не пишем ничего нового, ибо по найденному уже углу bac вместе с противолежащей ему стороной bc и другими известными сторонами можно по... — вычислить все остальное.

Пояснительные замечания. Прежде всего следует указать, что уже в латинских переводах XII в. с арабских источников употребляли выражение $\sinus\ rectus$ (прямой синус) для нашего обыкновенного синуса, в противоположность $\sinus\ versus$ (обращенный синус), равному $1 - \cos$ (стрела, *sagitta*), и точно так же $\sinus\ totus$ (целый синус) для обозначения радиуса. У арабов эти выражения встречаются уже, по крайней мере, около 1000 г. Пользуясь этими старинными обозначениями, можно формулировать теорему Региомонтана следующим образом:

$$\frac{\sin\ vers\ \alpha}{\sin\ vers\ a - \sin\ vers\ (b - c)} = \frac{(\sin\ tot)^2}{\sin\ b\ \sin\ c},$$

или, согласно современному начертанию,

$$\frac{1 - \cos\ \alpha}{\cos\ (b - c) - \cos\ a} = \frac{1}{\sin\ b\ \sin\ c},$$

или

$\sin\ b\ \sin\ c - \sin\ b\ \sin\ c\ \cos\ \alpha = \cos\ b\ \cos\ c + \sin\ b\ \sin\ c - \cos\ a$,
и, наконец,

$$\cos\ a = \cos\ b\ \cos\ c + \sin\ b\ \sin\ c\ \cos\ \alpha.$$

Только у Виеты (Viète) (1593 г.; см. № XIX) теорема эта (сформулированная в словах) имеет такой вид, что из выражающей ее у него пропорции сейчас же получается наше последнее равенство. Виете же, несомненно принадлежит честь открытия полярной теоремы о косинусах (для углов)

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha.$$

Теорема эта упоминается иногда уже незадолго до 1593 г., но безусловно имеет своим источником круги, стоявшие близко к Виете.

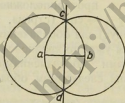
XI

Приближенное построение правильного пятиугольника

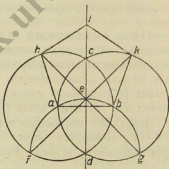
Из „Geometria deutsch“. Без указания года, места и автора (инкунабула приблизительно от 1484 г.):

Лист (2), Vo. Если кто хочет нарисовать пятиугольник с циркулем неизменного раствора, то раскрой циркуль настолько широко, сколько ты желаешь, и наметь две точки .a. b.

Затем оставь одно острие циркуля в точке .a. и проводи круг; точно так же оставь циркуль в точке .b. и проводи круг, и там, где один круг заходит за другой, наметь две точки .c. d.



Фиг. 10.



Фиг. 11.

Затем, наложи линейку на точки .c. и .d. и проводи длинную черту через обе точки, так что получится такой чертеж (фиг. 10).

[(2), Rū]. Затем помести острие циркуля в точку .d. и проводи круг через .a. b., и там, где этот круг проходит через черту .c. d. наметь .e. Затем посмотри, где этот самый круг заходит за круг .d. b. h., и наметь там .f., точно так же на другой стороне наметь .g. После этого наложи линейку на точку .f. и на .e. и проводи черту через эти точки до

круга .d.a.c.g. и наметь там точку .k. Таким же образом на другой стороне наметь .h. После этого помести циркуль в точку .k. и проводи круг, и, где он заходит за линию .d.e.c. наметь .i. Затем проводи черту от .i. до .k., от .k. до .b., от .b. до .a., от .a. до .h., от .h. до .i. Тогда ты получишь правильный пятиугольник, образец которого здесь приложен (фиг. 11)¹⁾. Таким образом получается правильный пятиугольник.

Пояснительные замечания. „Geometria deutsch“ очаровательная книжка, состоящая только из 6 пронумерованных листов. На передней странице первого листа имеется заголовок, задняя же страница последнего листа совершенно чистая. Все остальные страницы начинаются с прописной буквы стиля Ренессанс и содержат сверху текст задачи, а внизу соответствующие чертежи. Всего имеется 9 задач, ибо вышеприведенная занимает 2 страницы. В последних двух задачах приводятся чертежи закрытого шлема и щита, которым придана несколько математическая форма, остальные же — это простые задачи из практической жизни, встречающиеся в строительном деле: опустить перпендикуляр, найти середину дуги круга, превратить треугольник в квадрат (грубое решение), начертить пятиугольник и семиугольник (приблизленно), восьмиугольник (точно), выпрямить окружность (π берется равным $3\frac{1}{7}$). Как и в приведенной выше задаче, во всех случаях даются только построения.

„Geometria deutsch“ — вероятно, самое раннее печатное немецкое сочинение по геометрии. Впервые указал на эту книжку З. Гюнтер (Günther), открывший экземпляр ее в Нюрнберге и перепечатавший ее целиком²⁾.

Нарисованный выше „пятиугольник“ („Fünfort“) построен при неизменном растворе циркуля. Такого рода построения были излюбленными уже у арабов, и ими охотно занимались вплоть до новейшего времени. Хотя этот пятиугольник и равносторонний, но он, конечно, неправильный; однако, отклонение его от последнего так ничтожно, что практически его можно считать вполне правильным. Действительно, углы его равны соответственно, $\sphericalangle a = \sphericalangle b = 107^\circ 2'13''$, $\sphericalangle h = \sphericalangle k = 108^\circ 22'$, $\sphericalangle i = 109^\circ 11'33''$.

¹⁾ В оригинале наряду с этим чертежом дается еще отдельно пятиугольник *abkih*.

²⁾ „Zur Geschichte der deutschen Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert“. *Z. f. Math. u. Phys.* 20 (1875). Hist.—lit, Abth. Стр. 1—14; наш текст (не вполне безупречный), стр. 5. В Мюнхене и Берлине тоже имеются экземпляры этой книги.

Задача в точно такой же форме перешла в „Vnderweysung“ Дюрера (Dürer) (см. ниже, № XIV), но только Дюрер снабдил ее соответственным текстом. У Дюрера имеется также (и вестное, впрочем, еще в древности) построение семиугольника и грубое превращение треугольника в квадрат, даваемое „Geometria deutsch“.

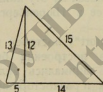
Автор „Geometria deutsch“ считал все свои построения вполне точными. Дюрер же, во всяком случае, знает и геометрически точное построение, если таковое имеется. Вычисление истинной величины угла в пятиугольнике было произведено впервые Джанбаттистой Бенедетти (Benedetti) и опубликовано в 1580 г. (см. ниже, XVII). Ср. программу (Ансбах, 1896) З. Гюнтера „Die geometrischen Näherungskonstruktionen Albrecht Dürers“, где точно вычислены все построения.

XII

Вычисление треугольника по трем сторонам. Формула Герона

Из Behende vnd hubsche Rec'henung auff allen kauffmannschafft (изучабула in Octavo в 237 ли тоъ без пагина ии; на первом листе з головок кни и, последний лист совершенно чист). На листе (2), Vo нач нается посвящение с имени а автора: Iohannes widman von Eger. Посвящение заканчивается на листе (3), Rü: Gegeben tzu leyptzick zcum newen Jare der Weniger zcal ⁴⁾ nach Christi gebur. Im neunvndachtzigsten. Колофон на листе (236) ⁵⁾, Rü гласит: Gedruckt in der Fürstlichen Stath Leipzick durch Conradum Kacheloffen, Im 1489 Jare.

Лист. (D2) Vo. [= (211), Vo.]. Если ты хочешь знать cathesum ³⁾ треугольника с разными сторонами и также aream superficialem ⁴⁾ его, то прибавь quadratum основания (фиг. 12),



Фи . 12.

т. е. 196, к quadrata меньшей стороны, т. е. к 169, получится 365 (211, Rü.). Затем вычти квадрат большей стороны, т. е. 225, из суммы первых двух квадратов, т. е. из 365, останется 140, раздели это пополам, получится 70, и это раздели на 14, получится 5, это меньший отрезок основания, образованный через cathesum. Затем помножь 5 на себя, получится 25. Это вычти из квадрата меньшей стороны, т. е. из 169,

⁴⁾ То есть в десятках и единицах (с опущением тысячел и сотен).

²⁾ Ог. етк. лист. (G₃). Печатные листы нумеруются сперв строчными буквами, и затем прописными.

³⁾ Ошибка наборщика: вместо „cathetum“, ибо в тогдашних рукописях трудно было отличить t от c. Cathetus означает здесь высоту треугольника.

⁴⁾ Площадь.

останется 144 и *R quadrata*¹⁾ этого числа есть *cathecus* выше-нарисованного треугольника. Если ты хочешь знать *Aream superficialem*, так сложи все три стороны, это даст 42, возьми половину, это будет 21. Затем найди разность между 21 и 13, это будет 8. Умножь теперь 8 раз 21, получится 168. Затем снова найди разность между 12 (!)²⁾ и 14, получится 7, умножь 7 раз 168, это даст 1176, умножь также *differentiam* между 15 и 21, т. е. 6, на 1176, и получится 7056, и *R quadrata* из этого, т. е. 84, есть (212 Vo) *area* выше нарисованного треугольника, или же поступи так, гораздо легче и быстрее. Умножь полчасти основания, т. е. 7, на *cathecum*, т. е. 12. Или же снова умножь полчасти *catheci*, т. е. 6, на все основание, т. е. на 14, и всегда получается 84, и это есть *area superficialis* данного выше треугольника³⁾.

Пояснительные замечания. Перед нами здесь пример того, как уже авторы первых печатных руководств по арифметике старались сообщить своим читателям кое-какие сведения по геометрии (как мы это видели уже и для алгебры в 1 томике).

Ясно, что это было возможно сделать лишь в самом простом виде. Ведь даже для арифметических правил не давалось никаких доказательств. В нашей задаче вычисляется высота $h=12$ по трем сторонам треугольника $a=15$, $b=13$, $c=14$. Назовем проекцию стороны b на основание через p ; в таком случае:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cp,$$

значит:

$$p = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = 5,$$

как это вычисляет и Видман. Так как, согласно пифагоровой теореме, высота $h=12$, то площадь треугольника будет равна, как устанавливает Видман в конце задачи:

$$\text{площадь} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 = 84.$$

Но, кроме того, Видман пользуется еще и так называемой формулой Герона, которую мы теперь пишем так:

$$\text{площадь} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

¹⁾ Radix quadrata — квадратный корень.

²⁾ Опечатка: вместо 21.

³⁾ У Видмана чертж в точности таков же, как наш, только плохо выполнен (высота у него расположена косо).

где s означает половину периметра треугольника, в рассматриваемом случае 21. Правило это (вместе с доказательством) встречается в нескольких местах у (вероятно позднегреческого) землемера Герона, но, по свидетельству арабов, является одним из многочисленных открытий Архимеда. Даже числовой пример Видмана имеется у Герона¹⁾.

XIII

Названия сторон прямоугольного треугольника Пифагорова теорема

Из „Coss“ Хр. Рудольфа, Страсбург, 1525²⁾.

Лист T, Rū. Имеется башня вышиной в 100 локтей и от башни ров шириной в 18 локтей, на конце рва ставят лестницу длиной в 30 локтей, прислоняющуюся другим концом к башне. Спрашивается, как высоко доходит по башне лестница? Обрати внимание на прямоугольный треугольник. Лестница это *upotenusa*. Ширина рва *basis*. *Cathetus* часть башни от конца лестницы до земли, неизвестная нам. Положи поэтому *cathetus* 1 $\mathfrak{c}$, тогда квадрат его будет 1 $\mathfrak{z}$. Возведи в квадрат также гипотенузу и основание. Квадрат гипотенузы будет 900, вычти отсюда 1 $\mathfrak{z}$, получится: квадрат основания 900 $\mathfrak{z}$ — 1 $\mathfrak{z}$ равняется 324 $\mathfrak{z}$. Поступи по правилам. Получится: 1 $\mathfrak{c}$ 24 $\mathfrak{z}$. До такой высоты доходит лестница по башне.

В своем новом издании этой книги („Die Coss Christoffs Rudolfs...“, Königsberg, 1553) Михаил Штифель (Stifel) придал этой задаче более общую формулировку, отказавшись также от употребления технических терминов:

Дана треугольная фигура с прямым углом. Длина основания 18 локтей и длина самой длинной линии 30 локтей. Какой длины должна быть средняя линия?

Пояснительные замечания. О слове Coss и встречающихся обозначениях для неизвестного ($\mathfrak{r}$ = *radix*), его квадрата ($\mathfrak{z}$ = *zensus*) и постоянной ($\mathfrak{d}$ = *denarius*) — см. т. I, XI. Слово гипотенуза означает дословно: „натянутая под“ (т. е. сторона, натянутая под прямым углом), и в этом значении встречается уже у Евклида (около 300 г. до начала н. э.). Два других слова „основание“ и „катет“ встречаются в этой связи лишь у позднейших математиков (землемеров) и наверное у Герона. Треугольник при этом всегда рисовали так, что „основание“ было горизонтально,

¹⁾ См. „Herons Vermessungslehre und Dioptra“ стр. 24/25 и 284/85.

²⁾ См. т. I, XII.

Пояснительные замечания. „Наставление в измерении“ Дюрера составляет, вместе с вскоре вышедшими затем сочинениями „Об искусстве возведения укреплений“ и „О человеческих пропорциях“, части более крупного задуманного им труда об элементах математики в живописи, рисовании и архитектуре. Содержание этой книги довольно простое и носит по существу практический характер; но в ней содержится довольно значительный запас математических сведений, свидетельствующий о высоком уровне образования у тогдашних итальянских (у которых обучался Дюрер) и немецких художников. Наряду со многими другими вопросами (например геометрическим построением разных алфавитов), в „Наставлении“ содержится учение о горизонтальной и вертикальной проекциях в применении также к кривым линиям в пространстве и начатки центральной перспективы.

Благодаря многочисленным немецким и трем латинским переводам дюреровское „Наставление“ приобрело широкое распространение и соответствующее влияние. Оно было даже переиздано в самое последнее время (Мюнхен, 1908), правда, в модернизированном виде, благодаря чему испарился армат эпохи и пропало многое важное.

Назовем отрезки, по примеру Дюрера, ab , bc , dc , тогда имеем по построению:

$$cd:bc = bc:ab;$$

таким образом cd есть, по старому выражению, третья пропорциональная к ab и bc .

Труд Дюрера — одна из первых (и, во всяком случае, прекраснейших) книг, набранных созданным как раз тогда фактурным шрифтом (являющимся в настоящее время наиболее употребительным газетным шрифтом). Любовно написанный разбор книги имеется у Л. Ольшки [Olschki¹⁾], „Geschichte der neusprachlichen wissenschaftlichen Literatur“, I, Heidelberg 1918, стр. 414—451].

XV

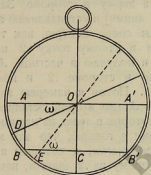
Практическое измерение высоты. Применение понятия котангенса

Из „Von künstlicher Abmessung aller grösse /ebene oder nidere/ in die lenge /höhe/ breite und tieffe /Als gräben/ Cisternen und brunnen /Mann mög darzu kommen oder nit/ Mit eim Astrolabio und Quadranten/ oder messleiter... Durch den Hochberühmbten Mathematicum Joannem Stöfflern von Justingen beschribenn“.

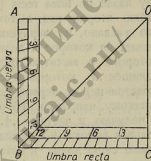
¹⁾ Русский перевод готовится к печати.

(Титульный лист еще длиннее. В книге, снабженной прекрасными гравюрами на дереве, 16 нумерованных листов in folio. На последней странице следующее указание места и времени печатания: „Gedruckt zu Franckfurt am Mein / Bei Christian Egenolph / im Mertzen Des jars nach der geburt Christi unseres seligmachers M. D. XXXVI“).

Предварительные замечания. Применяемая в нижеследующем отрывке „Astrolabium“ — это инструмент для измерения угла высоты. Фиг. 14 дает схематическое изображение его. Астролябию придерживают сверху за кольцо, так что OA принимает горизонтальное положение. На линиях AB , BC , CB' , $B'A'$, нанесены деления по 12 делений на каждой („digitus“ или „punctus“), причем число 12 стоит в углах B и B' (фиг. 15).



Фиг. 14.



Фиг. 15.

Указатель DO подвижен и устанавливается на измеряемый объект. Он называется „алидадой“ (по-лат. *mediclinium*), имеет диоптры (две дырочки для визирования). Линию DO Штеффлер называет „*lini fiduciae*“, а в переводе „*lini des vertrauens*“ (линия доверия). Ее наклон ω к горизонту измеряется „*umbra versa*“ („*verwandter schatten*“ — обращенная тень) AD , т. е. для нас тангенсом угла высоты ω , если мы положим OA равным 1. Если же луч визирования встречает не AB , а BC (т. е. если угол высоты больше 45°), то CE (где E точка пересечения луча с BC) будет котангенсом этого угла; CE называется в этом случае „*umbra recta*“ („*uffrechter schatten*“ — прямая тень). Эти понятия прямой и обращенной тени происходят от арабов (IX в.), и нижеследующая задача была уже и ими решена аналогичным образом ¹⁾. Но книга Штеффлера, изданная после его смерти

¹⁾ Ср. работу Г. Зюера (Suter), *Einige geometrische Aufgaben bei arabischen Mathematikern*. (Zbl. math, 3 Reihe, 8 Bd., 1907/08, стр. 23—30, особ. стр. 27—30.)

Вместо астролябии (лат. *saphaea*) первоначально пользовались жез-

(1531), одна из первых книг, излагавших эти вещи на немецком языке.

Лист Cij, Vo... Мне задано измерить вещь, лежащую в плоскости, неизвестной высоты, которая пусть будет .h. i., и мне задано узнать ее высоту, и я не могу к этой вещи подойти из-за рвов с водой или подобных препятствий. Тогда я подвешиваю *Astrolabium*, как обычно, и устанавливаю ее в первый раз в точке .k., и когда я рассматриваю высоту вещи через дырочки, то я нахожу, что *lini fiduciae* касается на линейке *umbrae versae* точки .6., на которое я делю .12., и получаю в частном .2., которое я держу в стороне. Затем я иду назад по *linea recta* (прямой линии) и устанавливаю астролябию второй раз в точке .l., и снова смотрю, как только что указано, на верхушку вещи и нахожу точку .2 *umbrae versae*, на которое я делю .12., и получаю в частном .6., из которого я вычитаю оставленное в стороне .2 и получаю излишек .4., который я сохраняю. Потом я измеряю *spacium* (расстояние) от первой остановки .k. до второй остановки .l. и нахожу, например, 16. шагов, которые я делю на излишек .4. и получаю в частном .4. Поэтому я говорю, что эта вертикальная высота .h. i. равна четырем шагам, к которым я прибавлю свою длину¹⁾, которую я приму за .2. шага и, наконец, вывожу, что высота .h. i. равна .6. шагам²⁾.

Пояснительные замечания. Разложив богато украшенный рисунок оригинала на его простейшие элементы, прибавив буквы *m, a, b, α, β* и, положив, далее, *hm = x*, *am = y*, мы получаем фиг. 16.

лом, ибо сафеа была изобретена лишь около 1050 г. выдающимся арабским астрономом Алларкали (Alzarkālī) (по-латыни Argachel). Зутер не замечает полного совпадения современного вычисления со старым решением, потому что он не выводит прямо формулы (как мы это делаем в дальнейшем), а применяет сперва теорему синусов и потом лишь производит преобразование. Вместе с Зутером я не сомневаюсь, что решение идет собственно еще от греков. Во всяком случае, со времен арабов оно никогда уже не утрачивалось.

У Хр. Клавия (*Clavius*) (*„Geometria practica“*. Рим, 1604, стр. 60—63) я нашел решение задачи с помощью теоремы синусов (наряду с решением при помощи котангенсов). Но вряд ли оно встречается впервые только здесь.

¹⁾ То есть высоту тела наблюдателя до уровня глаза.

²⁾ Точки, между которыми помещены использованные в этой задаче буквы и числа, служили в рукописях для выделения из текста.

На рисунке ¹⁾ *ka* или соответственно *lb* представляют наблюдателя (который в оригинале нарисован; *a, b* изображают глаза его). По данным наблюдений $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{12}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{12}$. Но автор пользуется котангенсами, образовав $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{6} = 2$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{12}{2} = 6$. Но мы имеем

$$y = x \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$16 + y = x \operatorname{ctg} \beta.$$

Отсюда, после вычитания, получаем:

$$16 = x (\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha)$$

и

$$x = \frac{16}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha},$$

что в точности соответствует старинному правилу. Тот факт, что высота башни только в три раза больше человеческого роста, несколько не смущал автора „практической“ геометрии.

XVI

Вывод теоремы синусов для прямоугольного сферического треугольника

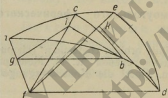
Из Nicolaus Copernicus, „De revolutionibus orbium coelestium“ (Нюрнберг, 1543), Lib. I, cap. XIV, 3. — Немецкий перевод К. Л. Менцера (Menzzer) „Nicolaus Copernicus aus Thorn. Über die Kreisbewegungen der Weltkörper“ (Thorn, 1879).

Предварительные замечания. В XIII гл. первой книги знаменитого труда, в котором впервые коперникова система мира была противопоставлена птоломеевой, содержится краткое изложение плоской тригонометрии, в следующей же главе — сферической. Коперник при этом опирается, разумеется, на труды своих арабских предшественников, поскольку они были ему известны, но во многом он совершенно самостоятелен. Появившаяся в 1533 г. тригонометрия Региомонтана (см. № X) тоже не оказала на него

¹⁾ Пропорции рисунка оригинала приблизительно те же, что и на фиг. 16. Написи в оригинале составлены все по-латыни. И остальные сочинения Штеффлера написаны по-латыни. Немецкий технический специальный язык только начинал формироваться в это время.

влияния, ибо труд Коперника был в основном закончен уже в 1530 г. Данный Менцером перевод заглавия книги довольно волен, ибо речь у Коперника идет о круговых движениях не „небесных тел“ (Weltkörper), а „небесных сфер“. Весьма вероятно, что вообще слова „orbium coelestium“ не принадлежат Копернику, своим трудом уничтожившему именно небесные сферы. — Двоякого рода написание имени Коперника — одно в латинском оригинале, другое в немецком переводе — восходит к самому Копернику. Имя семьи было Копперник (Koppernick) или нечто подобное, и после того как (около 1400 г.) оно превратилось из названия деревни в фамильное имя, писалось всегда с *pp*, т. е. на немецкий манер. Латинизированное имя сам Коперник первоначально писал с *p*, а впоследствии с *pp*. Написание имени с одним *p* за все село, может быть, от различного произношения его по-латыни и по-немецки. В силу тех же соображений Ретикус (Reticus), издавший „*Revoluciones*“ (сам Коперник был болен), снова стал писать его имя с одним *p*. Но после того как в XIX в. были найдены старые документы, коперниково общество в Торне (родном городе астронома) ввело снова *pp*¹⁾.

Стр. 47 (лист 21 Rū. оригинала). В сферических треугольниках, имеющих прямой угол, хорда двойной стороны, противолежащей прямому углу, относится к хорде двойной какой-нибудь из обеих сторон, заключающих прямой угол, как диаметр шара



Фиг. 17.

относится к хорде двойного угла, образуемого на большом круге шара первой стороной и третьей. Действительно, пусть abc ²⁾ будет сферический треугольник (фиг. 17), угол с которого прямой; я утверждаю, что хорда двойной (стороны) ab относится к хорде двойной (стороны) bc , как диаметр шара к хорде дуги, образуемой на большом круге двойным углом bac . Приняв a за полюс, опишем дугу большого круга de и дополним (дуги ab и ac) до квадрантов abd и ace .

¹⁾ Ср. в переводе Менцера стр. XII – XIV рассуждения М. Куртзе (Curtze) „Über die Orthographie des Namens Copernicus“, а также статью Г. Бендера (Bender), „Heimat und Volkstum der Familie Koppernick (Copernicus)“ (Darstell. und Quellen z. schlesischen Gesch. Bd. 27, Breslau, 1920).

²⁾ В оригинале повсюду капитель (abc); строчные буквы принадлежат Менцеру.

Из центра шара f проведем общее сечение fa кругов abd и ace ; общее сечение кругов ace и de пусть будет fe , а кругов abd и de — fd . Кроме того, общим сечением кругов ac и bc пусть будет fc . Проведем затем bg перпендикулярно к fa , bi к fc , dk к fe и соединим (точки g и i) прямой gi . Так как два круга, проходящих через полюсы друг друга, пересекаются под прямым углом, то угол aed будет прямой; но угол acb прямой по заданию, следовательно, каждая из плоскостей edf и bcf перпендикулярна к плоскости aef . Поэтому, если восстановить в плоскости aef перпендикуляр к общей линии пересечения fke , то он, согласно определению взаимно перпендикулярных плоскостей, образует прямой угол с kd . Поэтому kd по четвертой теореме одиннадцатой книги Эвклида перпендикулярно к aef . По тем же основаниям bi перпендикулярно к той же самой плоскости, и, следовательно, dk и bi взаимно параллельны по шестой теореме той же книги. Но gb тоже параллельно fd , ибо fgb и gfd представляют прямые углы; следовательно, по десятой теореме одиннадцатой книги Эвклида угол fdk равен углу gbi . Но так как угол $fk d$ прямой, то по определению перпендикуляра прямым будет также gib . Стороны же подобных треугольников пропорциональны, и, следовательно, df (относится) к bg , как dk к bi . Но bi есть половина хорды двойной дуги bc , ибо bi перпендикулярна к прямой, проведенной из центра f , и в силу тех же оснований bg есть половина хорды двойной стороны ba , dk — половина хорды двойной дуги de или двойного угла a , и df — половина диаметра шара. Следовательно, очевидно, что хорда двойной стороны ab относится к хорде двойной стороны bc , как диаметр к хорде двойного угла a или двойной дуги de ; доказательство этого окажется полезным.

Пояснительные замечания. Обозначим радиус шара (или одного из его больших кругов) 1 ; тогда, очевидно, хорда какой-нибудь двойной дуги есть по современному обозначению двойной синус простой дуги. Обозначим вслед за Коперником углы сферического треугольника через a, b, c , а противолежащие им стороны через A, B, C ; c в этом случае прямой угол, C — гипотенуза, и Коперник доказывает теорему:

$$\sin C : \sin A = 1 : \sin a,$$

или

$$\sin A = \sin C \cdot \sin a,$$

а по современному обозначению $\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha$. Это одна из тех шести теорем, которые в настоящее время мы выводим для

прямоугольных треугольников из так называемых аналогий Непера. Теорема эта имеется по существу уже у Птолемея (около 150 г. н. э.), хотя, как и ряд других теорем, она не формулирована явным образом. Арабы существенным образом дополнили тригонометрию Птолемея, и около 1000 г. у них встречается уже общая теорема синусов как для плоских, так и для сферических треугольников. Но полученный Коперником результат можно считать достаточно самостоятельным. В частности, у него встречается впервые на западе (после Региомонтана, книга которого, однако, как упомянуто, осталась ему неизвестной) стереометрическое доказательство. Аналогичный вывод он делает еще раз в № XIII той же главы, где он показывает, как, зная три стороны косоугольного сферического треугольника, можно определить углы его.

XVII

Тригонометрическое вычисление углов многоугольника

Из Io. Baptistae Benedicti Patritij Veneti Philosophi, Diversarum Speculationum Mathematicarum, et Physicarum Liber... Taurini... MDLXXXV.

Стр. 369.

Равноуголен ли построенный Альбрехтом
Дюрером пятиугольник?

Конраду Нейбарту (Neubart)

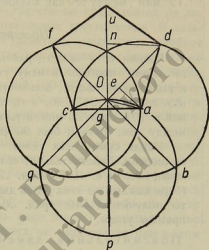
Если ты не думаешь, что построенный Альбрехтом Дюрером на данном отрезке пятиугольник равноуголен, то вообразим себе прилагаемый здесь рисунок (фиг. 18) подобным тому, который дает Дюрер. Проведем на нем, прежде всего, линию .o. a., мы получим угол .a. o. b., содержащий .60. таких градусов, которых два прямых содержат .360. или .30. таких, которых два прямых содержат .180.; ибо по условию дуга .a. b. есть шестая часть всей окружности, а угол .b. o. d. прямой, ибо и угол .b. o. q. прямой. Поэтому угол .d. o. a., как дополнительный к прямому, содержит .60. таких градусов, каких прямой угол содержит .90., а угол .o. a. c. содержит .15. таких градусов.

Опустим теперь перпендикуляр .a. e на .o. d.; как синус угла .a. o. e. он содержит .86 602. таких частей, каких .a. o. содержит .100 000. Но эта (хорда) .o. a., как хорда дуги .a. o., равна .51 762. таких (частей), каких радиус (полудиаметр) .a. d. или .a. c. содержит .100 000.

Действительно, синус половинной дуги .a. o. (так как .a. o. содержит .30. градусов) содержит 25 881. частей, следов-

тельно, .а.е. будет содержать .44 827. таких частей, каких .а.д. содержит .100 000. Следовательно, угол .а.д.о., синусом которого является .а.е., равняется .26. град. .38. мин. Но этот угол вместе с углом .а.о.д. составляет .86. град 38. мин. Если, наконец, отнять эту сумму от двух прямых (или) .180. град., то в остатке получится .93.

град. .22. мин., т. е. угол .о.а.д. Если прибавить к этому угол .о.а.с. в .15. градусов, то мы получим угол .с.а.д., равный .108. градусов .22. мин. и превосходящий истинный угол (правильного) пятиугольника на .22. мин. Или же, иначе, найдя угол .а.д.о. равным .26. град. .38. мин. и вычтя его из прямого, мы получаем угол .д.а.е., равный .63. град. .22. мин. Если к этому прибавить угол .е.а.о., дополнительный к прямому углу, из которого вычитают угол .а.о.е., равный .60. град., (угол) .е.а.о., равный, таким образом, .30. град., и если (370) прибавить еще угол .о.а.с. в .15. град., то в сумме эти три угла дадут названный угол .д.а.с., равный .108. град. .22. мин.



Фиг. 18.

Проверка угла .и.

Проведем .д.п.; мы видим, что .д.п. есть синус угла .д.о.п., равного .45. градусам; действительно, вертикальный с ним угол (ang. ei contrapositus) .q.o.p. равняется половине прямого. Таким образом .д.п. будет содержать .70 710. таких частей, каких .д.о. содержит 100 000. Но .д.о. содержит .115 270. таких частей, каких .а.д. содержит .100 000., ибо .е.д., как синус угла .е.а.д., равного .63. град. .22. мин., содержит .89 389. частей, а .о.е., как синус угла .е.а.о., равного .30 град., содержит .50 000. таких частей, каких .а.о. содержит .100 000. Но так как .а.о. содержит .51 762. части, если положить .а.д. равным .100 000. (частей), то .о.е. будет равно .25 881. части. Если сложить это с .с.д., то для .д.о. получится .115 270. частей, как мы и сказали. Но так как .д.п. содержит .70 710.

таких частей, каких $d.o.$ содержит $.100.000.$, то то же самое $d.n.$ будет содержать $.81507.$ таких частей, каких $d.o.$ содержит $.115270.$ или каких $d.a.$ либо $d.u.$ содержат $.100.000.$ Но это $d.n.$ есть синус угла $d.u.n.$, который, таким образом, равен $.54.$ град. $.36.$ мин. Удвоенный угол этот да т. $.109.$ град. $.12.$ мин., между тем как должно было быть $.108.$ град. (и) $.0.$ мин.

Проверка угла $d.$

Возьми угол $d.a.d.o.$, равный, как выше указано, $.26.$ град. $.38.$ мин., прибавь к нему угол $d.o.d.n.$ в $.45.$ град. $.0.$ мин., а также угол $d.u.d.n.$, дополнительный к прямому углу, равный $.35.$ градусам $.24.$ мин., и ты получишь весь угол $d.a.d.u.$ величиной в $.107.$ град. $.2.$ мин. и ты имеешь искомый (угол), который, между тем, должен был бы равняться $.108.$ град. $.0.$ мин.

Найдя сумму всех углов, увидим, что все было правильно вычислено. Действительно, если сложить вместе все пять углов $d.a.c.d.f.u.$, т. е. $.108.$ град. $.22.$ мин. с $.107.$ град. $.2.$ мин. (беря каждый из этих углов дважды) и с $.109.$ град. $.12.$ мин. ¹⁾, то получится $.540.$ град. $.0.$ мин., — сумма, равная шести прямым углам.

Пояснительные замечания. „Книга о различных математических и физических спекуляциях“ венецианского патриция и философа Джанбагиста Бенедетти (Benedetti) вышла в 1580 г., но в 1585 г. она была снабжена, несомненно, из издательских соображений, новым титульным листом, так что в настоящее время еще часто приходится встречаться со ссылками на 1585 г. как на год издания. Очевидно издание с титульным листом 1585 г. встречается гораздо чаще. — Пятиугольник из „Geometria deutsch“ (см. выше, № XI) был впоследствии всегда известен под именем дюреровского пятиугольника. Последняя глава „Спекуляций“ содержит научные сообщения в форме переписки. О Нейбарте в настоящее время ничего неизвестно. — Бенедетти первый вычислил углы этого пятиугольника. После него Хр. Клавий (Clavius) пришел в своей „Geometria practica“ (Romae, 1604, стр. 404 — 407) путем несколько иных выкладок к тому же самому результату ²⁾.

¹⁾ В оригинале описка: $.12.$ град., не исправленная в обширном списке опечаток.

²⁾ Клавий применяет теорему о синусах к треугольнику gad и опускает перпендикуляр из a на nd . Между прочим он выражает результаты своих выкладок семизначными числами, что в настоящее время, когда довольствуются небольшой точностью, произвело бы очень дурное впечатление.

Из вычислений Бенедетти прежде всего видно, что древне-авилонским понятием „градуса“ он пользуется еще не вполне твердо. Но в этом отношении он следует общепринятому употреблению. Далее, мы видим, что он не владел еще свободно теоремой о синусах в случае косоугольного треугольника, найденной арабами около 1000 г. и ставшей известной на Западе благодаря „Тригонометрии“ Региомонтана (составлена в 1464 г., издана в 1533 г.) (см. выше, № X), так что он предпочитал располагать такие треугольники на прямоугольные треугольники. В дальнейшем ходе вычисления можно заметить, насколько удобнее наше современное понимание синуса как отношения (окончательно утвердившееся только в XIX в.), чем старое определение его как отрезка. Гипотенузу положил равной 100 000 впервые Региомонтан. С помощью таблицы синусов (логарифмы были открыты лишь в начале XVII в.) можно легко проделать выкладки Бенедетти.

В своем переводе, я, разумеется, не придерживался с полной строгостью расстановки знаков препинания оригинала, но в остальных отношениях старался точно следовать ему. Печатнику, набравшему книгу Бенедетти, очевидно, уже не было известно назначение точек, между которыми помещались числа и буквы (см. выше, стр. 34, примечание), ибо он часто помещал переднюю точку числа (или буквы) непосредственно за предыдущим словом. Я, разумеется, не следовал за ним в этом отношении.

XVIII

Первая формулировка теоремы о тангенсах

Из Thomae Finkii, „Flenspurgensis Geometriae Rotundi, Libri XIII“, Basi-leae, 1583 ⁴⁾.

Предварительные замечания. „Геометрия круглого“ Финка (Finck) содержит изложение учения о круге и шаре, включая сюда также плоскую и сферическую тригонометрию. Если в каком-нибудь треугольнике даны две стороны и угол между ними, то в нем известны сумма двух других углов и (по теореме синусов) отношение их синусов. Задачу нахождения двух углов по их сумме и отношению их синусов решил уже Птоломей. Его комментатор, Теон Александрийский (около 370 г. н. э.), развил это решение; Региомонтан в своей „Тригонометрии“ (составленной около 1464 г., изд. 1533 г.) (см. выше, № X) тоже подвинул дальше эту задачу. Их обоих цитирует Финк,

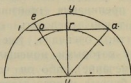
⁴⁾ Год издания указан лишь в конце тома (а также в двух вводных письмах). Автор подписывается (в первом предисловии) Thomas Finck.

дающий, однако, новое решение ее. Особенностью его решения является, однако, то, что он применил эту задачу к случаю косоугольного треугольника, для которого Региомонтан дал неудобное решение путем опускания высоты. — Встречающиеся в нижеследующем многоточия стоят на месте приводимых Финком цитат.

Стр. 281. И требуется, когда даны сумма или разность двух дуг или углов, а также отношение синусов, определить каждый отдельный (угол).

Этой задачей занимаются Теон и Региомонтан ... Их способ решения ты можешь там прочесть. Мы же воспользуемся следующим методом.

Как половина суммы членов отношения синусов относится к разности половины и одного члена, так (относится)



Фиг. 19.

тангенс половины данной суммы дуг к тангенсу такой дуги, на которую меньшая из искомых дуг меньше половины суммы или большая больше ¹⁾).

Пусть на нижеследующем рисунке (фиг. 19) данная сумма дуг ie , ea будет 40 град. и пусть будет данное отношение синусов этих дуг, т. е. отношение ao к io ... как 7 к 4. Тре-

буется отыскать отдельные дуги ae , ei . Проведем радиус iu к концу хорды i (радиус) iu , делящий пополам хорду и сумму дуг. Тогда угол gia равен 20 град., и его тангенс есть ag . Величину тангенса мы находим из канона (таблицы), равной

3,639, 702, а по предположению равной $5\frac{1}{2}$. Ибо ia есть 11,

следовательно, ga равно $5\frac{1}{2}$. Но как 3,639,702 относится

к 10,000,000, так $5\frac{1}{2}$ к 15 с излишком. Действительно,

остается ²⁾ 808,940. Но go есть тангенс угла oig ; и в той мере, в какой ig есть радиус, оно несколько больше 15.

¹⁾ В списке опечаток указана грубая опечатка.

²⁾ В оригинале говорится „*nebre remanent*“. Но следующее за этим число мне непонятно. Должно получиться в точности 15,111 130. Возможно, что Финк имеет в виду остаток до следующего миллиона. Но тогда должно было быть 888,870, и мы имели бы перед собой просто ошибку в вычислении.

Этим, говорю я, дается и разность $1\frac{1}{2}$ между $ag\ 5\frac{1}{2}$ & $ao\ 7$, или разность между $ig\ 5\frac{1}{2}$ & $io\ 4$. Ибо. . . как $иг$ в данной мере относится к радиусу, так (относится) $ог$ в данной мере к тангенсу угла $и$, т. е. дуги $еу$. Отсюда следует данная нами выше формулировка. Ибо как ag в данной мере $5\frac{1}{2}$ относится к 3,639,702, именно (282) к тангенсу угла $гга$, так (относится) $15 +$ т. е. $иг$ в данной мере к 10,000,000.

И как $15 +$ относится к 10,000,000, так (относится) $ог$ в данной мере $1\frac{1}{2}$ к 992,646, тангенсу угла $оиг$. Из равенства отношений (следует), что как половина суммы членов отношения синусов относится к разности половины и одного члена, так (относится) тангенс половины данной суммы к тангенсу дуги простафайрезиса (Prostaphaeresis) ¹⁾.

Именно

ag	ag	ог	ог
$5\frac{1}{2}$	3,639,702	$1\frac{1}{2}$	992,646

Следовательно, тангенс дуги $еу$ или подобной дуги равен 992,646. В каноне тангенсов этому значению соответствует град. $5,40'$ простафайрезиса. Если это отнять от половины iy , то остается $14,20'$, если это прибавить к половине ay , то получится $23,40'$, и, таким образом, большая из искомых дуг есть $25,40'$, меньшая — $14,20'$.

За этим следует соответствующая задача насчет разности, потом другие теоремы о треугольниках, между прочим, теорема синусов в совершенно современной формулировке: „стороны пропорциональны синусам противолежащих углов“ ²⁾, затем резюме разобранных случаев с указанием, что теперь нехватает еще случая задачи, когда требуется по углу и прилежащим к нему боковым ребрам найти оба угла при основании. По сравнению с Региомontanом он, читаем мы, вывел из прежнего (т. е. вышеприведенного) учения краткое, легкое и новое правило.

¹⁾ Так Финк называет, очевидно, дугу $еу$, ибо она получается из „прибавления“ и „отнимания“, как указывают греческое слово.

²⁾ Стр. 287: *Latera sinibus oppositorum angulorum sunt proportionalia.*

Стр. 292. И как половина суммы боковых ребер относится к разности половины суммы и одного ребра, так тангенс половины внешнего угла боковых ребер (относится) к тангенсу угла, на который меньший из внутренних углов меньше половины сказанного дополнения (до двух прямых), или больший больше.

За этим следуют два числовых примера, вычисление которых производится в точности так, как в случае вышеуказанной задачи.

Пояснительные замечания. Хотя Финк еще не умеет оперировать общим образом буквами, но мы можем без труда придать его рассуждению общий характер. Допустим, например, что $ie = \beta$, $ea = \alpha$, $\alpha + \beta = 40^\circ = \sigma$, $\sin \alpha : \sin \beta = 7 : 4 = m : n$. В таком случае теорема гласит:

$$\frac{m+n}{2} : \left(\frac{m+n}{2} - n \right) = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} : \operatorname{tg} \left(\frac{\sigma}{2} - \beta \right),$$

где вместо последнего члена можно взять и $\operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\sigma}{2} \right)$.

Угол rua на рисунке равен тогда $\frac{\sigma}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$, угол

$$roa = \frac{\sigma}{2} - \beta = \alpha - \frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma - \beta}{2}.$$

Чтобы убедиться, что синусы углов α и β относятся между собой, как ao к oi ¹⁾, достаточно опустить на ie перпендикуляры из a и i , представляющие эти синусы. Остальное представляет собой выкладки по *Regula aurea*, как выражается Финк, т. е. по тройному правилу (см. т. I, № II). Достоянно при этом внимания, что значения даны в десятичных знаках, как это ввел Региомонтан. Но это еще не десятичные дроби, так как еще отсутствует отделение дробной части числа от целой. Это сделал лишь Виета в своем каноне от 1579 г. (см. след. номер).

Что касается теоремы тангенсов, то, если мы обозначим оба боковых ребра через a и b и угол между ними через γ , она гласит следующее:

$$\frac{a+b}{2} : \left(\frac{a+b}{2} - b \right) = \operatorname{tg} \frac{180^\circ - \gamma}{2} : \operatorname{tg} \left(\frac{180^\circ - \gamma}{2} - \beta \right);$$

¹⁾ Финк, собственно, должен был бы ввести при ao и oi коэффициенты пропорциональности. Но так как они сократились бы между собой, то опущение их не меняет дела.

этому результату нетрудно придать нашу современную формулировку, что было сделано впервые Виетой, хотя только в словесной форме (см. ниже).

XIX

Четыре случая тригонометрического решения плоского косоугольного треугольника

Из Francisci Vietae, „Variorum de rebus mathematicis responsorum“, Liber VIII ... Turonis, ... 1593.

Предварительные замечания. Уже в 1579 г. Виета выпустил в Париже обширные тригонометрические таблицы (Canon mathematicus ..., Lutetiae 1579), во второй части которых излагалась основательно развитая система тригонометрии. Но наиболее законченную форму эти теоремы получили только в вышедшей в 1593 г. в Туре восьмой книге (остальных книг нет) о различных математических вопросах. Соответствующий отдел озаглавлен так: „*Πρόχειρον* ¹⁾“, seu ad usum Mathematici Canonis Methodica“, т. е. „Методическое руководство к пользованию математическим каноном“. Сперва здесь рассматриваются различные случаи плоских прямоугольных треугольников. Теоремы изложены еще по-старинному, в виде пропорций, как, например: „Как осознание (относится) к Perpendicularum (т. е. как горизонтальный катет относится к вертикальному катету) (см. выше, № XIII), так Sinus totus (т. е. величина гипотенузы, у Виеты 100 000) (ср. так же выше, № XVII) относится к тангенсу острого угла“. Приводимые Виетой теоремы отчасти новы, отчасти же, когда они не новы, сформулированы совершенно по-новому, как в нижеследующем теорема косинусов и теорема тангенсов. Доказательств теорем Виета не дает.

III

Лист 31, Rū.:

Если в каком-нибудь плоском треугольнике даны углы ²⁾, то в столбцах канона можно найти и стороны его.

Действительно, стороны пропорциональны синусам (углов), которыми они стягиваются ³⁾.

¹⁾ *Prócheiron*, дословно, примерно, „указатель“. Виета, прекрасно знавший древние языки, охотно употреблял сочиненные им самим греческие и латинские технические термины.

²⁾ Виета, разумеется, только забыл здесь сказать, что дана также одна сторона.

³⁾ Эта формулировка „*Latera sunt similia sinibus, quibus ea subtenduntur*“ звучит заметно более старинным образом, чем формулировка Флинка (см. № XVIII).

Иначе. Стороны треугольника пропорциональны суммам тангенсов (*Prosinibus*) углов, дополнительных к половинам углов, которые прилежат к ним.

Иначе. Основание треугольника пропорционально сумме тангенсов половинок прилежащих к нему углов, а каждое боковое ребро подобно разности между тангенсом угла, дополнительного к половине угла при вершине, и тангенсом половины прилежащего к нему у основания угла.

Иначе. Боковые ребра пропорциональны секансам (*Transsinuosis*) углов, дополнительных к углам у основания, к которым они прилежат. Основание же пропорционально разности или сумме тангенсов углов, дополнительных к этим углам: сумме в том случае, если оба угла при основании предполагаются острыми, разности, — если один из них тупой.

V

Если в каком-нибудь плоском треугольнике даны стороны, то можно найти и углы (32, Vo).

Действительно, как двойной прямоугольник из боковых ребер относится к разности между суммой квадратов ребер и квадратом основания, так *sinus totus* относится к синусу угла, дополнительного к углу при вершине.

При этом, если квадрат основания меньше суммы квадратов боковых ребер, то угол при вершине острый, если же больше, то тупой. Если же он равен ей, то угол при вершине прямой.

За этим следуют две, не имеющих для нас интереса, промежуточных теоремы.

VI

Если в каком-нибудь плоском треугольнике даны боковые ребра и угол при вершине, то можно найти углы при основании.

Действительно, как сумма боковых ребер (относится) к их разности, так (относится) тангенс полусуммы углов при основании к тангенсу их полуразности.

Иначе... Действительно, первое боковое ребро относится ко второму ребру, как секанс угла, дополнительного к углу при вершине, относится к некоторому другому отрезку; сумма или разность этого отрезка и тангенса угла, дополнительного

к углу при вершине, равна тангенсу угла, дополнительного к углу, стягиваемому первым ребром. Случай суммы (имеет место), когда угол при вершине принимается тупым, случай разности, — если он острый. В том случае, когда тангенс угла, дополнительного к углу при вершине, меньше указанного отрезка, угол, стягиваемый первым боковым ребром, острый; если же он больше его, — тупой, а если равен ему, то — прямой.

VII

(32, Rū.)

Если в каком-нибудь плоском треугольнике даны боковые ребра и угол при основании, то можно найти также другой угол при основании.

Действительно, если считать боковое ребро, стягиваемое данным углом, первым, то как первое ребро относится ко второму, так относится синус данного угла к синусу другого искомого угла у основания.

Или, как второе боковое ребро относится к первому, так секанс угла, дополнительного к данному углу, относится к секансу угла, дополнительного к искомому углу.

Но если данный угол острый и первое, стягиваемое им, ребро меньше второго ребра, то значение искомого угла двойное — именно, если отношение второго ребра к первому меньше отношения *sinus totus* к синусу данного угла. Поэтому в данном случае можно взять либо острый угол, который находят в каноне, либо же угол, дополнительный к нему до двух прямых. Из условий задачи нельзя вывести, какой из этих углов следует взять.

Дальнейшие номера относятся к сферическому треугольнику.

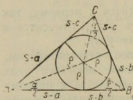
Пояснительные замечания. Что касается терминов, то введенные Виетой для тангенса и секанса названия „*Prosinus*“ и „*Transsinuosa*“ не имели успеха, между тем как названия „*Tangens*“ и „*Secans*“, употребленные незадолго до того впервые Т. Финком (см. № XVIII), утвердились. Названия кофункций стали постепенно употреблять лишь после Виеты. Слог *Co* возник из родительного падежа „*complementi*“. Изложение четырех случаев образцово и безупречно. Правда, теорема синусов была известна уже с древних времен (см. № XVI); что касается теоремы косинусов, тождественной по существу со старым обобщением пифагоровой теоремы, то даты возникновения ее нельзя в точности указать; но никогда до того она еще не была сформулирована.

так изящно. То же самое относится к теореме тангенсов, высказанной Т. Финком за 10 лет до того в гораздо более простом виде. Но наряду с этим Виета дает еще ряд других теорем, которые мы рассмотрим несколько ближе. При этом современному читателю не может не броситься в глаза то обстоятельство, что вообще основание треугольника выделяется еще по сравнению с боковыми ребрами, благодаря чему, как мы сейчас увидим, получаются несимметрические теоремы. Но до XIX в. еще не сознавали ясно и не применяли систематически понятия циклической перестановки.

Наряду с теоремой синусов совершенно симметрический характер носит еще вторая теорема (см. III, стр. 45).

На языке наших формул она гласит:

$$a : \left(\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right) = b : \left(\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) = c : \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right).$$



Фиг. 20.

Если умножить каждую скобку на коэффициент пропорциональности ρ , то каждый предыдущий член окажется равным каждому последующему, как это легко видно из фиг. 20 (Виета не дает никаких рисунков).

Второй вариант теоремы синусов носит уже несимметрический характер. На языке формул он гласит:

$$c : \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) = a : \left(\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) = b : \left(\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

Нет сомнений, что и эту теорему Виета доказал геометрическим способом.

Для доказательства правильности ее мы положим:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{s-a} \text{ и т. д., } \rho^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}.$$

Тогда путем несложных выкладок можно найти, что

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{c(s-c)}{\rho s}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{a(s-c)}{\rho s} \text{ и т. д.}$$

Достаточно умножить все последующие члены на

$$\frac{s}{s-c} = \frac{(s-a)(s-b)}{c^2},$$

чтобы получить первую симметрическую форму.

Третий, данный Виетой, вариант теоремы синусов гласит:

$$a = \operatorname{cosec} \beta = b : \operatorname{cosec} \alpha = c : (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta).$$

Это нетрудно доказать, написав:

$$a : \frac{1}{\sin \beta} = b : \frac{1}{\sin \alpha} = c : \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Так как Виета еще не может рассматривать функций тупых углов, то в случае тупого угла, например угла β , он вынужден брать ctg смежного с ним острого угла и, разумеется, вычитать его. Поэтому у него имеется в конце рассматриваемого номера лишнее для нас различие.

В V дается теорема косинусов, принимающая, согласно современному обозначению, вид:

$$2ab:(a^2 + b^2 - c^2) = 1 : \cos \gamma.$$

Дополнение содержит в себе, если пользоваться нашим способом выражения, только условие того, положителен ли, отрицателен ли или равен нулю $\cos \gamma$.

Первая часть VI—это, попросту, наша теорема тангенсов (см. № XVIII). Вторая часть может быть выражена следующими равенствами (фиг. 21):

$$a:b = \operatorname{cosec} \gamma : x \text{ и } x - \operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \alpha.$$

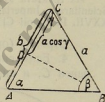
Отсюда получается:

$$\frac{b}{\sin \gamma} = a \operatorname{ctg} \alpha + a \operatorname{ctg} \gamma,$$

и, наконец,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma},$$

в чем легко убедиться по чертежу, ибо числитель этой дроби равен BD , а знаменатель равен AD . В новейшее время эта формула получила в немецкой литературе название *separierter Tangensatz*; она очень удобна для выкладок без логарифмов.



Фиг. 21.

Далее, мы имеем:

$$AC:EC = BF:FH,$$

или

$$r:c = \frac{Sc + sC}{c} : \frac{Sc + sC}{r}.$$

Отсюда следует, что синус составного (угла):

$$FH = \frac{Sc + sC}{r}.$$

Это — во-первых.

Если же на том же самом чертеже больший угол $= ACF$, синус его $FH = S$ и косинус $= CH = C$, а меньший угол $= ACG$, его синус $= AE = s$, а косинус $= EC = c$, то синус остаточного угла $= DF$. Но

$$EC:AE = CH:HK,$$

или

$$c:s = C:\frac{sC}{c}.$$

Следовательно:

$$FK = FH - HK = \frac{Sc - sC}{c}.$$

Затем имеем:

$$AC:EC = FK:DF,$$

или

$$r:c = \frac{Sc - Cs}{c} : \frac{Sc - sC}{r}.$$

Поэтому синус остаточного угла $= \frac{Sc - sC}{r}$. Это — во-вторых.

Пояснительные замечания. Прежде всего заметим, что при обозначении годов в „Трудах Петербургской академии наук“ еще пользовались старыми римскими знаками для 1000 и 500. Происхождение знака для 1000 неясно, знак для 500 представляет половину первого. Только в позднеримскую эпоху возникли M (как сокращение от mille) и D (буквенное изображение правой половины I) знака CIO).

Приведенная нами работа петербургского академика Ф. К. Майера (Maier) и другие труды его знаменуют прогресс в символике. Правда, для производства выкладок его способ мало практичен,

ибо в нем нехватает обозначения угла. В настоящее время уже не пользуются таким способом вывода, но он все же еще пригоден. Если ввести обозначения углов и положить $r=1$, то он становится несколько удобнее. Заметим, кроме того, что Майер не понимал еще ясно различия знаков в разных квадрантах. Решительное улучшение в этот вопрос ввел Эйлер (см. следующий номер).

XXI

Теорема Муавра

Из „Introductio in Analysin infinitorum“. Auctore Leonhardo Eulero. Tomus Primus. Lausannae... MDCCXLVIII.

Стр. 97.

132. Так как $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1$, то, разложив на множители, получим: $(\cos. z + \sqrt{-1} \cdot \sin. z)(\cos. z - \sqrt{-1} \cdot \sin. z) = 1$. Хотя эти множители мнимые, но они оказываются очень полезными при сложении и умножении дуг. Действительно, пусть требуется найти произведение таких множителей:

$(\cos. z + \sqrt{-1} \cdot \sin. z)(\cos. y + \sqrt{-1} \cdot \sin. y)$; получаем:
 $\cos. y \cdot \cos. z - \sin. y \cdot \sin. z + (\cos. y \cdot \sin. z + \sin. y \cdot \cos. z)\sqrt{-1}$.

Но, так как $\cos. y \cdot \cos. z - \sin. y \cdot \sin. z = \cos. (y + z)$ & $\cos. y \cdot \sin. z + \sin. y \cdot \cos. z = \sin. (y + z)$, то это произведение:
 $(\cos. y + \sqrt{-1} \cdot \sin. y)(\cos. z + \sqrt{-1} \cdot \sin. z) = \cos. (y + z) + \sqrt{-1} \cdot \sin. (y + z)$, & подобным же образом:

$(\cos. y - \sqrt{-1} \cdot \sin. y)(\cos. z - \sqrt{-1} \cdot \sin. z) = \cos. (y + z) - \sqrt{-1} \cdot \sin. (y + z)$ и

$(\cos. x + \sqrt{-1} \cdot \sin. x)(\cos. y + \sqrt{-1} \cdot \sin. y)(\cos. z + \sqrt{-1} \cdot \sin. z) = \cos. (x + y + z) + \sqrt{-1} \cdot \sin. (x + y + z)$.

133. Отсюда следует, что

$(\cos. z + \sqrt{-1} \cdot \sin. z)^2 = \cos. 2z + \sqrt{-1} \cdot \sin. 2z$ &
 $(\cos. z - \sqrt{-1} \cdot \sin. z)^3 = \cos. 3z + \sqrt{-1} \cdot \sin. 3z$.

Поэтому, вообще:

$(\cos. z + \sqrt{-1} \cdot \sin. z)^n = \cos. nz + \sqrt{-1} \cdot \sin. nz$.

Пояснительные замечания. А. де-Муавр (Moivre), французский эмигрант, проживавший в Лондоне, никогда не излагал этой теоремы в столь отчетливом виде, как Эйлер в цитированном отрывке, хотя в замаскированной форме она встречается у него, начиная с 1707 г. Мы воспроизвели по возможности точно форму набора текста у Эйлера. Прежде всего бросается в глаза, что знаки функций все набраны курсивом, что теперь больше не делается¹⁾. Далее, за этими знаками всегда стоит точка как знак сокращения. Материал также расположен иначе, чем в наше время, когда отдельные равенства выписываются в особых строчках, благодаря чему значительно облегчается обзорность материала. Но, с другой стороны, все это представляет лишь второстепенные отличия по сравнению с современным способом начертания, обнаруживая вместе с тем огромный прогресс по сравнению с эпохой около 1600 г. (см. № XVII), когда еще не были знакомы с символикой формул.

Умозаключение от частных случаев к общей теореме производится в настоящее время более строгим образом (полная индукция). Обозначение i для $\sqrt{-1}$ впоследствии ввел сам Эйлер; но общераспространенным оно стало лишь в XIX в., в особенности благодаря последовательному употреблению его Гауссом. Соответственно этому мы пишем теперь теорему Муавра так:

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos nz + i \sin nz,$$

где n может быть и дробным, а не только целочисленным, как в дедукции Эйлера. Само собой разумеется, что при i можно взять и знак минус.

Первая часть эйлерова „Введения в анализ бесконечных“ была издана на немецком языке еще в новейшее время, именно, в 1885 г. Г. Мазером (Maser) в издательстве Ю. Шпрингера в Берлине [впрочем, уже в 1788 г. все это сочинение целиком вышло в немецком переводе И. А. Х. Михельсена (Michelsen)].

¹⁾ Набор формул и отдельных букв курсивом начался с появления труда Томаса Харриота (Harriot) „*Artis analyticae praxis*“, Лондон, 1631; с тех пор он стал все более и более распространяться.

Именной указатель

- Александр** из Афродизии (II в. до н. э.). Родом из Кари; впоследствии проживал в Афинах, где написал „Комментарий“ к Аристотелю. 7, 8.
- Альхайтам**, см. Ибн-Альхайтам.
- Алцаркали** (латиниз. Арцахель; жил около 1029—1087). Родился, вероятно, в Кордове. Выдающийся астроном-наблюдатель и изобретатель инструментов (в частности, „Сафеи“). 34.
- Антифон** (около 430 до н. э.). Афинский философ-софист. Сохранилось сообщение о его попытках решить квадратуру круга. 7.
- Аристотель** (384—322). Ученик Платона, учитель Александра Македонского. Его философская система господствовала в течение всех средних веков. Он был также выдающимся естествоиспытателем. 7, 8.
- Архимед** (287?—212 до н. э.). Жил в Сиракузах, где погиб при завоевании города римлянами. Величайший математик древности и, вообще, один из величайших математиков всех времен. Сочинения его большей частью сохранились. 20, 23, 30.
- Бендер**, Георг (1920). 36.
- Бенедетти**, Джамбатиста (латин. Benedictus; 1530—1590). Род. в Венеции. Придворный геометр и физик герцога Савойского. 28, 38, 40, 41.
- Видман**, Иоганн. Род. около 146) в Эгере. Изучал медицину; читал лекции по алгебре в Лейпциге. 28, 29, 30.
- Виета**, Франсуа (1540—1633). Французский юрист (судья). Один из крупнейших математиков начала нового времени. См. также I выпуск. 26, 44, 45, 47, 48, 49, 5.
- Гарриот**, Томас (1560—1621). Род. в Оксфорде. Главное его сочинение, имевшее особенно важное значение для установления алгебраических обозначений, появилось лишь через 10 лет после его смерти. 53.
- Гаусс**, Карл Фридрих (1777—1855). Род. в Брауншвейге, впоследствии профессор математики и директор обсерватории в Геттингене. Один из величайших математиков всех времен (см. также I томик). 53.
- Гейберг**, Иоганн Людвиг (1854—1928). Специалист по классической филологии, профессор Копенгагенского университета. Периздал многих греческих математиков (и врачей). 9, 12, 17, 18.
- Герон** Александрийский. Повидимому, землемер и техник. Ученые спорят как о времени его жизни, так и о его научном значении. И. Л. Гейберг и его ученики относят Герона к III в. после н. э. и считают его лишенным критического чутья компилятором. Э. Хоппе (из Геттингена) относит его к началу I в. до н. э. и считает самостоятельным физиком и математиком. Имеются также ученые, относящие его ко времени между обеими выше-названными датами. 19, 20, 22, 29, 30.
- Гиппократ** Хиосский (около 440 до н. э.). Один из лучших ранних

- греческих математиков, занимавшийся проблемой квадратуры круга и нашедший при этом квадратуру различных луночек круга. 7, 8.
- Гюгтер**, Зигмунд (1848—1922). Историк математики. Был профессором географии в Мюнхенской высшей технической школе. 27, 28.
- Дюрер**, Альбрехт (1471—1528). Выдающийся нюрнбергский живописец и гравер на дереве и меди. Учился в Италии и Нидерландах. Его „Наставление“ („Unterweisung“) было долгое время излюбленным руководством практической геометрии — и не только для художников. 28, 31, 32, 38, 40.
- Зугер**, Генрих (1848—1922). Род. в Цюрихе, где был преподавателем математики. Выдающийся знаток арабской математики. 33.
- Ибн-Альхайтам** (965?—1038). Родом из Басры в Месопотамии; жил впоследствии в Каире. Выдающийся астроном и математик. 9.
- Клавий**, Христофор (1537—1612), ученый езуит. Родом из Бамберга (или окрестностей его). Его немецкое латинизированное имя неизвестно. Нет твердых данных ни в пользу „Schlüssel“, ни в пользу „Klaus“. 33, 40.
- Коперник**, Николай (1473—1543). Родом из Торня. Умер каноником в Фрауенбурге. Основатель названной по его имени системы мира. 35, 36, 37, 38.
- Курце**, Максимилиан (1837—1903). Родился в Валенштедте. Был преподавателем математики в Торне. Очень хороший знаток средневековой математики. 36.
- Леонардо** Пизанский (ум. 1250?). О его жизни ничего неизвестно. Своими сочинениями он способствовал распространению арабской математики на Западе. 20.
- Мазер**, Герман (род. 1856 или 1857 в Цюллихау, ум. 1902 в Берлине). Переводчик на немецкий язык древних, а также и более новых, сочинений по математике. 53.
- Майер**, Ф. К. (1697—1729). С 1726 член Петербургской академии наук. 50, 51, 52.
- Манициус**, Карл (1848—1922) (Дрезден). Специалист по классической филологии. Издал различных греческих математиков и астрономов, снабдив их переводами. 17.
- Менге**, Генрих (1838—1926). Родом из Аахена, директор гимназии в Майнце до 1902. Переиздал эвклидовские „Data“ и „Рраинопсепта“. 15.
- Мендаль**, Г. (1886). 23.
- Менцер**, Карл Людольф (1816—1893). Родом из Галле на Зале, умер в Ростке. Учитель (математик); около 1850 выпустил несколько трудов, между прочим также натурфилософского характера. В 1853 демонстрировал в ряде городов опыт Фуко с маятником. 35, 36.
- Михельсен**, Иоганн Андрей Христиан (1749—1797). Учитель математики в Берлине. Знаменитый педагог. 53.
- Муавр**, Абрагам де- (1667—1754). Эмигрировав из Франции в Лондон, давал частные уроки. Изобретательный математик. 52, 53.
- Нейбарт**, Конрад (1580). 38, 40.
- Непер** (Neper, собст. Napier или нечто подобное; 1550—1617). Шотландский дворянин, изобретатель логарифмов. 38.
- Ницше**, Эрнст (1788—1872). Учитель, специалист по классической филологии, жил в Берлине и Штральзунде. Переиздал ряд греческих классиков по математике. 14, 15.
- Ольшки**, Леонардо (род. 1885 в Вероне). Профессор романской филологии Гейдельбергского университета. 32.
- Папп** (конец III в. после н. э.). Составил огромный, не лишенный самостоятельности, сборник, в котором содержится много извлечений из потерянных сочинений

- более древних математиков. 15, 16.
- Пифагор** (VI в. до н. э.). Философ и математик. Сообщения о его собственных трудах носят несколько легендарный характер. Названная по его имени теорема была открыта, вероятно, кем-нибудь из его школы. 30.
- Платон** (429?—348?). Крупнейший греческий философ-идеалист, учитель Аристотеля. Как и последний, он тоже пользовался огромным влиянием в средние века, особенно в раннюю пору их. 20.
- Птоломей, Клавий** (100—178). Жил в Александрии, где составил большой труд по астрономии, называвшийся у арабов и в течение всех средних веков „Альмагестом“. По его имени геоцентрическую систему мира называют „птоломеевой“. Но, разумеется, не он творец этой системы. 17, 18, 19, 38, 41.
- Региомонтан** (1436—1476). Род. около Кенигсберга во Франконии, откуда имя „Regiomontanus“ (т. е. „кенигсбергский“). Его нелатинизированное имя было Иоганн Мюллер. Выдающийся астроном и математик начала нового времени. 24, 25, 38, 41, 42, 43, 44.
- Ретикус, Георг Иоахим** (1514—1576). Его настоящее нелатинизированное имя неизвестно. Его ученое имя означает „Ретиец“. Дело в том, что он был родом из Фельдкирха в Форарльберге. Имеет заслуги в области тригонометрии. 36.
- Рудио, Фердинанд** (род. в Висбадене в 1856). Профессор в Цюрихе. 7, 9.
- Рудольф, Христофор**. Род. в 1500 в Яуере в Силезии. Выдающийся арифметик и алгебраист начала нового времени. 30.
- Симплиций** (начало VI в. после х. э.). Вместе с 6 другими профессорами афинской высшей школы, закрытой по распоряжению императора Юстиниана за свой языческий дух в 529, эмигрировал в Персию. Написал очень хорошие комментарии к Аристотелю, представляющие также ценность по заключенным в них историческим данным. 7.
- Теон Александрийский** (около 370 после н. э.). Дал комментарий к „Альмагесту“ Птолемея. Отец женщины-астронома Гипатии, убитой в 415 во время погрома язычников. 41.
- Тропфке, Иоганн** (род. в 866 в Берлине). Автор большого труда „Geschichte der Elementar-Mathematik“ (2. Aufl., 7 B-de, Berlin 1921/24). 46.
- Феодосий** (около 100 до н. э.). Родом из Триполиса. Автор несамостоятельной „Сферики“. 14, 15.
- Фийк, Томас** (1561—1656). Род. в Фленсбурге. Был профессором медицины и математики в Шлезвиг-Гольштейне и Дании. 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48.
- Шёне, Герман** (род. 1870 в Галле на Зале). Профессор классической филологии Мюнстерского (в Вестфалии) университета. 19, 30.
- Шёнер, Иоганн** (1477—1547). Первый немецкий гимназический преподаватель математики. Меланхтон устроил его в 1526 в шюринбергской гимназии. Был также астрономом. 24.
- Штифель, Михаил** (1487—1567). Род. в Эсслингене в Вюртемберге, был сперва монахом-августинцем, затем евангелическим священником в различных областях Германии. Крупный алгебраист начала нового времени. 30.
- Штёфлер, Иоганн** (1452—1531). Род. в Юстингене в Вюртемберге, где был впоследствии пастором. Преподавал затем математику в Тюбингене. Меланхтон был одним из его учеников. В свое время был известным астрономом, обратившим на себя внимание своими предсказаниями (в частности, дня страшного суда). 32, 33, 35.
- Эвдем** (около 320 до н. э.). Родом с острова Родоса. По предло-

жению своего учителя Аристотеля составил историю геометрии, извлечения из которой сохранились у других авторов, например у Симплиция. 7, 8.

Эвдокс (410—356). Родом из Книды в Малой Азии. Выдающийся предшественник Эвклида в учении о пропорциях, Архимеда — в инфинитезимальной геометрии. Также астроном. Из его сочинений ничего не сохранилось. 15.

Эвклид (по-греч. Eukleides). Жил около 300 до н. э. в Александрии. Его „Начала“ геометрии, содер-

жащие в себе в геометрической форме также начатки алгебры, еще и в настоящее время являются образцом для наших элементарных учебников. Подробнее см. в I выпуске. 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 20, 30.

Эйлер, Леонард (1707—1783). Род. в Базеле, жил в качестве академика в Петербурге и Берлине. Очень крупный и плодотворный математик, сочинения которого выходят в настоящее время в большом издании. 52, 53.

СОУНБ им. В. Г. Белинского
<http://book.uraic.ru/>

СОУНЬ им. В. Г. Белинского
<http://book.ugais.ru/>

Оглавление

Стр.

Предисловие	5
I. Гиппократова луночка	7
II. Геометрическое доказательство одного алгебраического то- ждества	9
III. Теорема о пересекающихся внутри окружности хордах . .	12
IV. Пересечение двух больших кругов	14
V. Теорема Паппа	15
VI. Теорема Птолемея	17
VII. Теорема сложения косинусов	18
VIII. Первое вычисление объема усеченной пирамиды	19
IX. Длина окружности и площадь круга у немецких землемеров около 1400 г.	23
X. Первая формулировка теоремы косинусов для сферического треугольника	24
XI. Приближенное построение правильного пятиугольника . .	26
XII. Вычисление треугольника по трем сторонам. Формула Герона.	28
XIII. Названия сторон прямоугольного треугольника. Пифагорова теорема	30
XIV. Теорема о пропорциональных отрезках. Построение третьего пропорционального отрезка	31
XV. Практическое измерение высоты. Применение понятия ко- тангенса	32
XVI. Вывод теоремы синусов для прямоугольного сферического треугольника	35
XVII. Тригонометрическое вычисление сторон треугольника . .	38
XVIII. Первая формулировка теоремы о тангенсах	41
XIX. Четыре случая тригонометрического решения плоского косо- угольного треугольника	45
XX. Теорема сложения синусов в более новой форме и с более новым выводом	50
XXI. Теорема Муавра	52
XXII. Именной указатель	54

СОУНБ им. В. Г. Белинского
<http://book.ugraic.ru/>

СОУНБ им. В. Г. Белинского
<http://book.ugraic.ru/>

СОУНБ им. В. Г. Белинского
<http://book.ugraic.ru/>

СОУНБ им. В. Г. Белинского
<http://book.ugraic.ru/>

25 =

41 p. 75 k. 11 p. 25 k.
71950

4
май 8

СОУНБ им. В. Г. Белинского
<http://book.ugaic.ru/>